UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - Campus de Cascavel

Eduardo Ghisi
Edivaldo Ramos Batista
Fabiana Fatima Delabona
Milena Cristina Heydt

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

CASCAVEL
2021

Eduardo Ghisi
Edivaldo Ramos Batista
Fabiana Fatima Delabona
Milena Cristina Heydt

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I.

Orientadoras: Profª Pamela Goncalves, Dulcyene Maria Ribeiro, Marieli Vanessa Rediske de Almeida e Arleni Elise Sella Langer.

CASCAVEL
2021

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este relatório final, para a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, contém descrições dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente para o projeto intitulado: Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática - PROMAT. Este projeto está vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste/*Campus* Cascavel-PR.

Neste ano de 2021, o PROMAT ocorreu de forma remota e síncrona devido à pandemia causada pelo coronavírus. Diferentemente dos anos anteriores em que o projeto acontecia de forma presencial na universidade, neste ano nos reunimos com os alunos na plataforma *Jitsi Meet* em todos os encontros.

O *link* para o acesso de todas as aulas foi disponibilizado no dia anterior ao primeiro encontro. Para nos comunicarmos tínhamos um grupo no *Whatsapp* com todos os participantes, no qual os alunos podiam tirar suas dúvidas, além disso disponibilizávamos informações sobre o projeto. As aulas aconteciam aos sábados e tinham duração de 2 horas e 30 minutos, com início às 9:00 e término às 11:30.

Os alunos eram de várias cidades do estado do Paraná, algumas distantes de Cascavel, também houve inscrições até mesmo de outros estados como Ceará, Paraíba, Rio de Janeiro e Brasília. Isto é considerado por nós um diferencial, tal integração só se fez possível em razão do formato remoto, pois caso as aulas tivessem sido na modalidade presencial, por questões de logística, a distância poderia ser um obstáculo.

A organização dos conteúdos trabalhados nos encontros, seguiram o resultado de uma breve pesquisa sobre os conceitos com maiores incidências nas provas de vestibulares, assim para os nove encontros estavam previstos serem trabalhados: ideia de Função (variável, dependência, área e perímetro); funções polinomiais (afim e quadrática) e equações; linguagem algébrica (simbologia notação) e gráfica; domínio, imagem e tipos de função (injetora, sobrejetora, bijetora, crescente, decrescente); progressões aritméticas e geométricas; sistemas, determinantes e matrizes aula de exercícios.

As aulas ocorreram no primeiro semestre de 2021, semanalmente mediada pela plataforma *Jitsi*, com início em 6 de março e término em 15 de maio. Em um primeiro momento preparamos algumas aulas até a data de início e depois juntamente com a execução do projeto continuamos a preparação das aulas restantes. Ressaltamos que em nenhum momento tivemos contato presencial com os participantes do projeto PROMAT. Por motivos de segurança, a fim de evitar e se proteger do contágio pelo vírus da COVID-19, nossa preparação também ocorreu apenas de forma virtual. Realizamos reuniões semanais na plataforma *Microsoft Teams* para orientação, discussão de ideias, correções e detalhes dos planejamentos elaborados para as aulas.

Assim este relatório contém, em sequência, a opção teórica e metodológica utilizada em nossas aulas, o cronograma com as datas e conteúdos trabalhados em cada encontro realizado no primeiro semestre de 2021, os planos de aula seguido de cada relatório e as nossas considerações finais.

2. OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Durante a elaboração das aulas do PROMAT, planejamos iniciar as aulas com a resolução de problemas, para que as aulas se tornassem mais dinâmicas e atraentes para os alunos, quebrando com o paradigma do ensino totalmente tradicional.

Inicialmente podemos pensar nas perguntas “O que é um problema?” e “O que é resolver um problema?”. Segundo Vergnaud (1986 apud DANTAS, 2010, p.27) um problema é “qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução”. Para Onuchic e Allevato (2011, p.81) um problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”.

De acordo com Polya (1997, p.1), “resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado”. Neste sentido, ao resolver problemas nos deparamos com dificuldades e obstáculos, então tentamos encontrar um caminho para contorná-los, mediando informações que levem os alunos a chegar a uma solução.

Zorzan (2007), corrobora argumentando que com a resolução de problemas, o ensino da matemática deixa de ser apenas a reprodução de fórmulas e conceitos teóricos e passa a aproximar a matemática do cotidiano dos alunos, uma vez que os conceitos matemáticos são abordados de forma contextualizada. Essa contextualização permite que os alunos consigam fazer associação do conteúdo com sua aplicação (ZORZAN, 2007).

Assim, uma situação problema é o ponto de partida para a aprendizagem matemática, invertendo-se a lógica tradicional em que o conteúdo de matemática é apresentado nas escolas, ou seja, primeiro a definição seguida de exemplos e então exercícios (MÜLLER, 2000). Nesse contexto, torna-se necessário que os alunos desenvolvam estratégias próprias para chegar à solução partindo dos conceitos matemáticos pré-existentes e do raciocínio lógico já constituído (ROMANATTO, 2012)

Com essa tendência, não há um único caminho para chegar à solução de um problema, o processo que o aluno percorre até chegar à solução torna-se mais importante do que a própria solução, pois demonstra os passos e o modo em que o aluno desenvolveu seu raciocínio (MÜLLER, 2000). Dessa forma, como o aluno é um membro ativo no processo de aprendizagem, diversas capacidades são exercitadas, como a criatividade, a liberdade, a imaginação, a criticidade, entre outros (ROMANATTO, 2012).

Outro fator relevante é o fato do professor também assumir um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, pois deve estar atento se os problemas propostos despertarão de fato o interesse dos alunos, desafiando a curiosidade e promovendo a satisfação em chegar na solução do problema (MAIOR; TROBIA, 2009). Durante o processo de resolução do problema, o professor deve estar sempre atento aos alunos, acompanhando, orientando, apoiando, validando raciocínios e buscando mostrar quando o caminho tomado pelos alunos não atingirá o objetivo a ser alcançado (ROMANATTO, 2012).

Desse modo, nota-se que ao utilizar a resolução de problemas tanto em sala de aula presencial, como no modo remoto, é possível que a aprendizagem se torne mais significativa e eficaz, pois traz o aluno como protagonista e o professor deixa de ter papel central no processo de ensino e aprendizagem.

Destacamos um problema abordado em nossas aulas, onde o trabalho teve por objetivo desenvolver os conceitos de matrizes em que trouxemos para sala de aula o vídeo “Cooperativa de Leite”, disponível em: https://youtu.be/AXiNp1o88jA. O vídeo propõe um problema, onde uma cooperativa de seis fazendas produtoras de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso comum, assim, a questão chave era: “Em qual das fazendas deveria ser instalado o tanque?”. Para solucionar este problema utilizamos a interação para obter respostas, e levar os alunos a pensarem sobre a solução do problema por meio dos conceitos matriciais envolvidos, neste momento organizamos uma tabela, e ressaltamos as colunas principais e secundária.

Construímos uma tabela com os alunos onde era explicado as distâncias de ponto a ponto entre todas as fazendas. Destacando que uma tabela organizada em linhas e colunas no formato m x n, onde m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical) é chamado de matriz. Mostramos na tabela construída em que as posições de cada distância obtida na matriz possuem uma nomenclatura para a localização dos valores na matriz. Enfatizamos a importância da abordagem de matrizes por meio de um problema inicial onde tivemos ótimos resultados e respostas positivas dos alunos, sobretudo muita participação, como podemos observar melhor na secção 2.10.2 relatório da aula 7.

Ressaltamos que foi possível problematizar os conteúdos de forma semelhante as aulas presenciais, na utilização dos problemas para introduzir novos conceitos nas aulas. O modo remoto não nos impediu de trabalhar a tendência de resolução de problemas, porém, não se abrange a tendência em seus aspectos gerais, visto que em alguns aspectos ficamos sem possibilidade, como por exemplo o trabalho em grupo, a troca de experiência entre os alunos nas resoluções, a reformulação de hipóteses e o debate sobre diferentes resoluções.

3. PROMAT

O PROMAT é um Projeto de Ensino institucional ofertado pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, especificamente pelo Colegiado de Licenciatura em Matemática. É nele que parte da carga horária e das atividades de estágio que os alunos do curso devem cumprir são realizadas. O projeto visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam ingressar no ensino superior. São ofertados conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos de vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos.

O PROMAT tem duração de um ano letivo e para o ingresso dos estudantes, são realizados dois processos seletivos, sendo um no início do curso e outro na metade. Para o primeiro semestre são trabalhados os conteúdos do ensino fundamental e os professores são os alunos da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I do curso de licenciatura em matemática. No segundo semestre, são abordados conteúdos do ensino médio e os professores são os alunos da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Devido ao contexto pandêmico as datas de realizações de vestibulares foram alteradas. Consequentemente, esta edição do PROMAT foi pensada de acordo com isso. Geralmente os conteúdos trabalhados no primeiro semestre eram do ensino fundamental, porém neste ano o foco estava nos conteúdos exigidos no vestibular da Unioeste, ou seja, foram abordados tanto temas do ensino fundamental, como do ensino médio.

Nos anos anteriores, com os encontros presenciais, as aulas tinham maior duração. Ocorriam também aos sábados com início às 8:00 e término às 11:40. Como já mencionamos anteriormente, neste ano a duração das aulas foi menor, com início às 9:00 e término às 11:30.

3.1 CRONOGRAMA

O cronograma dos encontros do primeiro semestre e os conteúdos trabalhados em cada um deles está a seguir:

Quadro 1:Cronograma e conteúdo do PROMAT.

Encontro	Data	Conteúdo
1	06/03	Função.
2	13/03	Função afim e função quadrática.
3	20/03	Funções crescente, decrescente, constante e gráfico de uma função afim e quadrática.
4	27/03	Domínio, contradomínio, imagem de função, função injetora, sobrejetora e bijetora.
5	10/04	Progressão aritmética: definição, classificação, propriedades, termo geral e soma dos n primeiros termos.
6	17/04	Progressão geométrica: definição, classificação, propriedades, termo geral e soma dos n primeiros termos.
7	24/04	Matrizes: definição, classificação, cálculos de soma, subtração, multiplicação e multiplicação por um número.
8	08/05	Sistemas lineares: definição, método de substituição, determinantes e regra de Cramer.
9	15/05	Função, progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes e sistemas lineares.

Fonte: Os autores.

4. PLANOS DE AULA E RELATÓRIOS

Nesta parte estão os planos de aula preparados para cada encontro do PROMAT. Abaixo de cada plano de aula está o relatório da respectiva aula. Ressaltamos que todas as aulas foram preparadas e ministradas por nós.

Todos os encontros ocorreram de forma on-line pela plataforma *Jitsi.* O link para cada encontro era disponibilizado para os alunos em um grupo de *Whatsapp* em que todos os alunos tinham acesso. Ressaltamos que em nenhum momento tivemos contato pessoalmente com estes alunos, apenas contato virtual.

4.1 MÓDULO/ENCONTRO 1 -

4.1.1 Plano de aula

Conteúdo: Função.

Público-Alvo: Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de função.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com função, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Fazer a distinção entre equação e função.
- Identificar funções em problemas do cotidiano.
- Diferenciar variável dependente e independente.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Softwares: Mentimeter, Microsoft Forms, *slides* em Sway, papel sulfite e caneta, Jitsi.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente será realizada uma dinâmica com os alunos com o intuito de obter uma interação inicial entre os alunos e o professor. Essa dinâmica consiste em pedir aos alunos que escrevam na plataforma Mentimeter se pretendem fazer algum curso na Unioeste e qual curso querem ingressar, e sobre o que eles entendem sobre equação e função. Disponibilizaremos o link com as perguntas no chat do Jitsi (plataforma que ocorrerão as aulas). A plataforma mostra as respostas enviadas pelos alunos em forma de nuvem de palavras. Com base nas respostas obtidas será feita uma breve discussão sobre o funcionamento do curso e suas expectativas.

Após a dinâmica, serão propostas duas situações problemas para que eles resolvam com o intuito de perceberem a diferença principal entre as duas situações, em que a primeira envolve uma equação e a segunda envolve uma função. O professor irá ler os exercícios com a turma e pedirá se eles conseguem visualizar a diferença entre os problemas apenas com a leitura.

- Equação e função

1. (Unicamp) Após ter percorrido 2/7 de um percurso e, em seguida, caminhando 5/11 do mesmo percurso um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso. Qual o comprimento total do percurso?

Resolução:

Seja x o percurso total, sabemos que ele correu $\frac{2}{7}$ do percurso total, em seguida caminhou $\frac{5}{11}$ deste percurso e ainda faltavam 600 metros.

Com estas informações podemos montar uma equação para descobrir o valor do percurso total.

$$\frac{2}{7}x + \frac{5}{11}x + 600 = x$$

Encontrando frações equivalentes e resolvendo a equação

$$\frac{22}{77}x + \frac{35}{77}x - x = -600$$

$$\frac{20}{77}x = 600$$

$$x = 2310$$

Logo, o percurso total é de 2310 metros.

2. (UFMS-MS) Para custear seus estudos, um estudante oferece serviços de digitação de textos. O preço a ser pago pela digitação de um texto inclui uma parcela fixa e outra parcela que depende do número de páginas digitadas. Se a parcela fixa for de R$ 4,00 e cada página digitada custar R$ 1,60, quanto será a quantidade de páginas digitadas de um texto, cujo serviço de digitação custou R$ 39,20?

Resolução:

Podemos observar que ao variar a quantidade de folhas, vamos ter uma variação no preço, logo, o preço depende da quantidade de folhas.

Quadro 2: Quantidade de folhas e o respectivo preço a ser pago.

Quantidade de folhas	Preço R$
1	$1{,}6 \times 1 + 4 = 5{,}6$
2	$1{,}6 \times 2 + 4 = 7{,}2$
3	$1{,}6 \times 3 + 4 = 8{,}8$
4	$1{,}6 \times 4 + 4 = 10{,}4$
x	$1{,}6x + 4 = y$

Fonte: Acervo dos autores.

Como o serviço de digitação custou R$ 39,20, podemos encontrar a quantidade de folhas

$$1{,}6x + 4 = 39{,}20$$

$$1{,}6x = 35{,}20$$

$$x = 22$$

Logo, para o valor de R$ 39,20 foram digitadas 22 páginas.

Será dado um tempo para que os alunos resolvam os problemas e antes de fazer a resolução serão feitos alguns questionamentos:

- O que vocês entendem por grandezas?

R: O que é grande. Uma medida de alguma coisa. Algo que eu consigo medir. O quão grande é algo.

- Como podemos mensurar essas grandezas? O que significa os números obtidos pelas grandezas?

R: Por meio de régua, termômetro.

- O que podemos utilizar para representar as grandezas?

R: Unidades de medidas.

- Quais as grandezas envolvidas em cada problema proposto?

R: No primeiro problema é comprimento e no segundo é o número de páginas.

Serão discutidas as respostas para então formalizar o conceito de grandeza:

Grandeza é tudo aquilo que envolve medidas, ou seja, que pode ser medida. Medir significa comparar quantitativamente uma grandeza com uma unidade através de uma escala pré-definida. Exemplo: Peso, temperatura, distância, entre outros.

Após essa discussão será feita a correção dos exercícios e discutido as respostas juntamente com a turma. Durante as correções o professor fará algumas perguntas para auxiliar os alunos a compreenderem as diferenças entre equação e função abordadas pelos exercícios. As perguntas com as possíveis respostas serão:

- No primeiro problema, precisou envolver uma segunda grandeza para resolver o problema? E no segundo?

R: Não precisou no primeiro problema. No segundo problema foi necessário envolver uma segunda grandeza.

- O que podemos afirmar sobre as grandezas envolvidas no segundo problema?

R: Uma grandeza é determinada a partir da outra.

- Qual a diferença na resolução dos dois problemas propostos?

R: No primeiro problema havia apenas uma grandeza e no segundo tinham duas.

- A grandeza das respostas continuou sendo a mesma daquela utilizada para resolver o problema?

R: No primeiro problema sim, já no segundo problema a grandeza utilizada para resolver o problema foi o total pago pela digitação.

- Que conceito matemático está envolvido vocês já estudaram que envolvem essas informações?

R: No primeiro problema está envolvido equação e no segundo função.

Espera-se que os alunos consigam identificar as diferenças entre equação e função com os problemas propostos. Após as correções o professor vai formalizar os conceitos de equação e função:

Uma **equação** é uma sentença matemática que contêm pelo menos um valor desconhecido e é expressa por uma igualdade. Este valor desconhecido é chamado **incógnita**.

Uma **função** consiste em uma relação de dependência entre duas grandezas, em que uma dessas grandezas é determinada a partir de outra. Essas grandezas são denominadas **variáveis**.

Quando esta relação de dependência entre duas grandezas existe, a função relaciona elementos de um conjunto A com elementos de um conjunto B. E dizemos então, uma função de A em B.

Voltando ao problema 2, observemos que temos duas grandezas, uma é a quantidade de folhas digitadas e a outra o preço, vejamos que o preço é determinado a partir da quantidade de folhas.

Podemos perceber que os valores da primeira grandeza que é a quantidade de folhas, são números inteiros e não negativos, já os valores da segunda grandeza que é o preço, podem ser números inteiros e decimais.

Podemos considerar dois conjuntos, um conjunto A em que seus elementos são os valores da primeira grandeza e um conjunto B em que seus elementos são os valores da segunda grandeza.

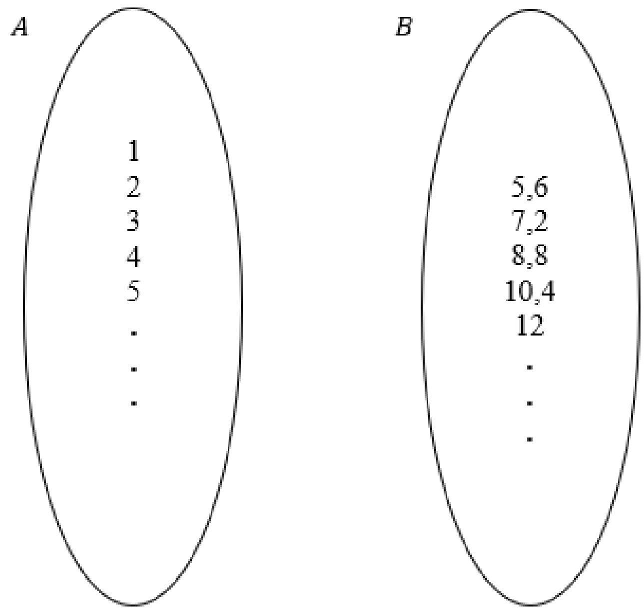

Figura 1:Conjuntos A e B considerados.
Fonte: Próprio autor.

OBS: Não há problema quando vários elementos do conjunto de partida tem o mesmo elemento correspondente no conjunto de chegada. O que não pode acontecer é que um único elemento do conjunto de partida possua dois ou mais elementos correspondentes no conjunto de chegada.

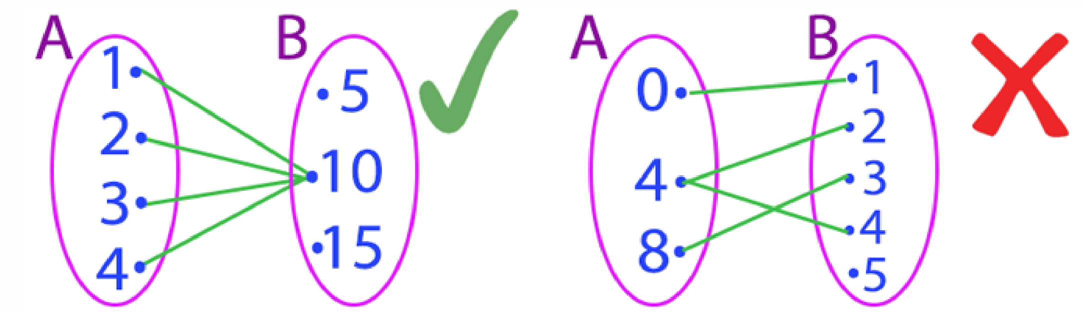

Figura 2:Correspondência de elementos entre conjuntos.
Fonte: https://blog.professorferretto.com.br/nocoes-de-funcao-por-meio-de-conjuntos/.

Observemos que na Figura 1 os conjuntos possuem infinitos elementos, logo A está contido no conjunto N dos números naturais e B está contido no conjunto Q dos números racionais. Dessa forma, a função que relaciona as grandezas quantidade de folhas e preço é definida por $f: N \rightarrow Q$.

Após as formalizações, será enfatizado as diferenças entre incógnita e variável ressaltando os dados obtidos nos exercícios.

Será proposto o problema a seguir para que os alunos analisem e resolvam a situação problema e retomem alguns conceitos sobre função.

3. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: RS 5,00 a bandeira mais RS 1,20 por quilômetro rodado, como mostra o quadro.

Quadro 3: Quilômetros rodados e o respectivo valor a ser pago.

Quilômetro (km) rodado	Valor a ser pago $(R\$)$
$0 \leq km < 1$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 0 = 5{,}00$
$1 \leq km < 2$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 1 = 6{,}20$
$2 \leq km < 3$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 2 = 7{,}40$
$3 \leq km < 4$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 3 = 8{,}60$

Fonte: Próprio autor.

Observação: Consideramos aqui que o taxímetro se altera a cada quilômetro completo. Portanto, o valor pago varia aos saltos: $R\$\ 5{,}00$ antes de completar o $1^{\text{º}}$ quilômetro; $R\$\ 6{,}20$ antes de completar o $2^{\text{º}}$; $R\$\ 7{,}40$ antes do $3^{\text{º}}$, etc.

a) Rita gastou $R\$\ 23{,}00$ em uma viagem de táxi nessa cidade. Qual foi o número inteiro de quilômetros dessa viagem?

b) Qual das viagens de táxi, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros?

c) Qual será o valor da tarifa para uma quantidade q de quilômetros?

Resolução:

a) Vamos considerar q a quantidade de quilômetros rodados para o valor de R$ 23,00. Conforme o quadro, o valor a ser pago é igual a bandeirada de R$ 5,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado. Assim, temos $23{,}00 = 5{,}00 + 1{,}20q$, resolvendo a equação chegamos que $q = 120$.

b) Devemos observar que pela forma como é cobrada a tarifa tanto para 8,1 quilômetros ou 8,9 quilômetros a tarifa é a mesma pois é considerado o valor inteiro de 8 quilômetros, $5{,}00 + 1{,}20 \times 8 = 14{,}6$.

c) O valor da tarifa será de $5{,}00 + 1{,}20q = T$.

- Variável dependente e independente

Será dado um tempo para que os alunos resolvam as perguntas do problema proposto, sendo posteriormente discutidas juntamente com a turma as respostas obtidas, de modo que eles consigam construir o conceito de variável dependente e independente. Durante a discussão o professor fará os seguintes questionamentos:

- Quantas grandezas estão envolvidas no problema? Quais são elas?

R: Estão envolvidas duas grandezas, a quantidade de quilômetros rodados e o custo a pagar.

- O que podemos afirmar sobre o valor a ser pago pela viagem quando o número de quilômetros rodados aumenta?

R: O valor a ser pago também aumenta.

- É possível observar uma relação entre o valor a ser pago pela viagem e o número de quilômetros rodados?

R: Sim.

- Quando uma variável é determinada a partir de outra, como o valor da tarifa no caso do problema, como podemos chamar essa variável? E quanto a variável pré-determinada, como a quantidade de quilômetros, como ela é chamada?

R: Dependente, independente.

Com os questionamentos acima, esperamos que os alunos percebam que o valor a ser pago pela viagem é a variável dependente, enquanto os quilômetros rodados é a variável independente. Após a discussão, será formalizado os conceitos de variável dependente e independente.

A **variável dependente** é determinada a partir de outra variável pré-determinada. Enquanto a **variável independente** é pré-determinada.

Após a formalização desse conceito, será solicitado aos estudantes que tentem resolver o seguinte exercício:

4. (Unioeste, 2019) Em determinado país, o imposto de renda I é calculado sobre a renda R de um cidadão segundo a seguinte fórmula: $I = Rt - D$, onde t é uma taxa ou porcentagem e D é um valor a deduzir. Os valores de t e D variam de acordo com o valor da renda do cidadão, conforme o quadro a seguir, expressa em unidades monetárias do país.

Faixa de Renda (R)	Taxa (t) a ser aplicada	Dedução (D)
$0 \leq R < 3.000,00$	0	0
$3.000,00 \leq R < 5.000,00$	0,1	300,00
$5.000,00 \leq R < 10.000,00$	0,2	800,00
$R \geq 10.000,00$	0,25	1.300,00

Figura 3: Quadro com a variação dos valores de t e D de acordo com R.
Fonte: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores.

Sobre o imposto I como função da renda R de um cidadão deste país, é CORRETO afirmar.

a) Um cidadão que tem uma renda inferior a 3.000,00 paga 300,00 de imposto de renda.

b) Qualquer cidadão cuja renda R é tal que $3.000,00 \leq R < 5.000,00$ paga o mesmo valor de imposto de renda.

c) Quanto maior a renda do cidadão, menor será o valor do imposto de renda a pagar porque a dedução é maior.

d) Um cidadão, cuja renda é de 8.000,00, gasta efetivamente 10% de seu salário com imposto de renda.

e) A função $I = I(R)$ é uma função definida por partes, constante em cada parte.

Deixar um tempo, insistindo que os alunos digam o que conseguiram resolver...

Resolução:

A) Segundo o quadro e fórmula dada, um cidadão que tem uma renda inferior a 3.000,00 não paga a taxa t e dedução D, assim seu valor de imposto de renda será de:

$$I = R \times 0 - 0$$

$$I = 0$$

Logo, não pagará nenhum valor de imposto. INCORRETO.

B) Um contraexemplo é um cidadão 1 que possui renda de 3.000 e um outro cidadão 2 com renda de 4.000, assim cada um pagará de imposto de renda, respectivamente:

cidadão 1 cidadão 2

$t = 0{,}1$ $D = 300{,}00$ e $R = 3.000$ $t = 0{,}1$ $D = 300{,}00$ e $R = 4.000$

$I = 3000 \times 0{,}1 - 300$ $I = 4000 \times 0{,}1 - 300$

$I = 300 - 300$ $I = 400 - 300$

$I = 0$ reais. $I = 100{,}00$ reais.

Logo, não pagam o mesmo valor de imposto, pois a fórmula também depende da renda R a qual nesse caso pode variar de 3.000,00 até 4.999,99. INCORRETO.

C) A dedução aumenta, mas a taxa aumenta o suficiente para impedir que isso ocorra. Um contraexemplo seria:

cidadão 1 cidadão 2

$R = 9.000$ $t = 0{,}2$ e $D = 800$ $R = 12000$ $t = 0{,}25$ e $D = 1300$

$I = 9000 \times 0{,}2 - 800$ $I = 12000 \times 0{,}25 - 1300$

$I = 1800 - 800$ $I = 3000 - 1300$

$I = 1000$ reais. $I = 1700$ reais.

Ou seja, o cidadão 2 possui renda maior, mas também paga mais imposto que o cidadão 1. INCORRETO.

D) Calculando o valor de seu imposto de renda temos:

$R = 8.000$ $t = 0{,}2$ e $D = 800$

$$I = 8000 \times 0{,}2 - 800$$

$$I = 1600 - 800$$

$I = 800$ reais.

Bem um cidadão que possui renda de 8.000 reais paga 800 reais de imposto. Agora, basta calcular qual o valor de 10% da sua renda para descobrir se é 800 reais ou não.

10% de 8000

$\frac{10}{100} \times 8000 = \frac{1}{10} \times 8000 = \frac{8000}{10} = 800$ reais.

Como 10% da sua renda é o mesmo que o valor de seu imposto, esta é a alternativa CORRETA.

Após a resolução e discussão do exercício, será proposto o exercício a seguir:

5. (Unioeste, 2018) Um supermercado faz uma promoção em um produto que custa p reais a unidade, da seguinte forma: na compra da segunda unidade, tem-se 50% de desconto e, assim sucessivamente, em todas as unidades pares compradas, ou seja, na quarta (sexta, oitava...) unidade há 50% de desconto. Assim, é INCORRETO afirmar

a) Uma função f que descreve o preço a pagar, $f\ (n)$, na compra de n unidades, com n par é$f(n) = \frac{3 \times n}{4} \times p$.

b) Uma função que descreve o preço a pagar, $f(n)$, na compra de n unidades, com n ímpar, é$f(n) = \left(\frac{3 \times n}{4} + \frac{1}{4}\right) \times p$.

c) Uma função f que descreve o preço a pagar, $f\ (n)$, na compra de n unidades, com n natural qualquer, é $f(n) = (\frac{1+n}{2}) \times p$.

d) Na compra de 100 unidades, um cliente ganha de desconto um valor equivalente a 25 unidades.

e) Na compra de 13 unidades, um cliente ganha de desconto um valor equivalente a 3 unidades.

Resolução:

Primeiramente, deixaremos cerca de 3 minutos para que os alunos reflitam sobre as possibilidades de resolução do problema. Na sequência pediremos que exponham sobre o que pensaram. Só a seguir e a depender da exposição dos alunos, usaremos o nosso quadro de papel para realizar a seguinte explicação: Primeiramente calculamos a compra de um a dez produtos para ter uma noção de como a situação se comporta.

Quadro 4: Preço pago por quantidade de produto.

Quantidade de produtos p	Preço pago em função de p
1	p

2	$p + \frac{p}{2} = \frac{3}{2} \times p$
3	$\frac{3}{2} \times p + p = \frac{5}{2} \times p$
4	$\frac{5}{2} \times p + \frac{p}{2} = 3p$
5	$3p + p = 4p$
6	$4p + \frac{p}{2} = \frac{9}{2}p$
7	$\frac{9}{2}p + p = \frac{11}{2}p$
8	$\frac{11}{2}p + \frac{p}{2} = 6p$
9	$6p + p = 7p$
10	$7p + \frac{p}{2} = \frac{15}{2}p$

Fonte: Próprio autor.

Observação: é possível observar que os números ímpares e pares possuem um padrão de crescimento, ficando mais fácil visualizar quando separamos o preço a ser pago, em duas colunas, uma com números ímpares e outra com números pares

.

Quadro 5: Preço a ser pago por quantidade ímpar e par de produtos.

Ímpares		Pares	
p	$\frac{2}{2}p$	$\frac{3}{2}p$	$\frac{3}{2}p$
$\frac{5}{2}p$	$\frac{5}{2}p$	$3p$	$\frac{6}{2}p$
$4p$	$\frac{8}{2}p$	$\frac{9}{2}p$	$\frac{9}{2}p$
$\frac{11}{2}p$	$\frac{11}{2}p$	$6p$	$\frac{12}{2}p$
$7p$	$\frac{14}{2}p$	$\frac{15}{2}p$	$\frac{15}{2}p$

Fonte: Próprio autor.

Na primeira coluna amarela se encontram os valores já obtidos para a compra de uma quantidade ímpar de produtos. Na segunda coluna são respectivamente os mesmos valores da primeira, porém sem estar na forma irredutível afim de facilitar a percepção de padrão. Quanto as duas tabelas cinzas, segue a mesma ideia, porém para as quantidades pares.

O importante a perceber aqui é que na segunda coluna, tanto amarela como azul, os valores aumentam $\frac{3}{2}p$ de linha para linha. Ou seja, temos um padrão de comportamento para as compras de quantidades ímpares e pares do produto.

Bem agora vamos descobrir qual a alternativa incorreta. Ou seja, vamos focar em encontrar o erro, e não em provar que as demais são corretas.

1. Como já vimos, os números pares aumentam em um padrão, logo se $f(n)$ realmente descrever o preço da compra das quantidades pares do produto, então 0quando substituirmos n pelos dias 2, 4, 6, ..., terão que resultar respectivamente em $\frac{3}{2}p, 3p, \frac{9}{2}p, \ldots$. Assim, como $f(n) = \frac{3\times n}{4} \times p$, obtemos:

$$f(2) = \frac{3 \times 2}{4} \times p = \frac{3}{2}p$$

$$f(4) = \frac{3 \times 4}{4} \times p = 3p$$

$$f(6) = \frac{3 \times 6}{4} \times p = \frac{9}{2}p$$

Ou seja, $f(n)$ leva os n pares nos respectivos preços a serem pagos. Correta.

2. Como já vimos, os números ímpares aumentam em um padrão, logo se $f(n)$ realmente descrever o preço da compra das quantidades ímpares do produto, então quando substituirmos n pelos dias 1, 3, 5, ..., terão que resultar respectivamente em $p, \frac{5}{2}p, 4p, \ldots$. Assim, como $f(n) = \left(\frac{3\times n}{4} + \frac{1}{4}\right) \times p$, obtemos:

$$f(1) = \left(\frac{3 \times 1}{4} + \frac{1}{4}\right) \times p = p$$

$$f(3) = \left(\frac{3 \times 3}{4} + \frac{1}{4}\right) \times p = \frac{5}{2}p$$

$$f(5) = \left(\frac{3 \times 5}{4} + \frac{1}{4}\right) \times p = 4p$$

Ou seja, $f(n)$ leva os n ímpares nos respectivos preços a serem pagos. Correta.

3. Bem, dessa forma, se $f(n)$ realmente descrever o preço da compra dos produtos independentemente se ímpar ou par, então quando substituirmos n pelos dias 1, 2, 3, 4, 5,..., terão que resultar respectivamente em $p, \frac{3}{2}p, \frac{5}{2}p, 3p, 4p, \ldots$.Caso falhar em algum, podemos afirmar que é incorreta. Assim, como $f(n) = (\frac{1+n}{2}) \times p$, obtemos:

$$f(1) = \left(\frac{1+1}{2}\right) \times p = p$$
$$f(2) = \left(\frac{1+2}{2}\right) \times p = \frac{3}{2}p$$
$$f(3) = \left(\frac{1+3}{2}\right) \times p = 2p$$

Bem, descobrimos que $f(n)$ não descreve o valor a ser pago para a compra de 3 produtos, visto que $f(3) = 2p \neq \frac{5}{2}p$.

Assim, a alternativa incorreta é a letra “c”.

4. Bem, para saber se é verdade, vamos considerar o valor sem o desconto, ou seja, cada unidade custaria p, obtendo assim $100p$. Agora se descontar desse valor o total gasto utilizando o desconto, chegamos ao valor economizado. Para calcular o valor gasto com o desconto basta perceber que de 1 a 100 temos 50 números ímpares e 50 números pares, logo se atribuir aos números ímpares o valor de p e aos 50 números pares o valor de $\frac{p}{2}$. Assim temos:

$$100p - \left(50p + \frac{50}{2}p\right) = 100p - 75p = 25p.$$

Correta.

5. Seguindo a mesma ideia da alternativa d, só que agora considerando o valor sem desconto como $13p$. Como de 1 a 13 temos 7 números ímpares e 6 pares, chegamos em:

$$13p - \left(7p + \frac{6}{2}p\right) = 13p - 10p = 3p.$$

Correta.

Avaliação:

A avaliação será realizada durante a aula com base nos exercícios propostos e por meio das respostas dos questionamentos feitos durante a aula.

Referências:

CHAVANTE, E.; PRESTES. D. **Quadrante: Matemática 1**. São Paulo: SM, 2016.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática 1.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, D. **1ª lista de exercícios- Equação do 1º grau.** Disponível em: <http://diegolima.ueuo.com/listas/lista1.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

UNIOESTE. **Provas anteriores.** Disponível em <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores>. Acesso em: 24 fev. 2021.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática, 9o ano**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

4.1.2 Relatório da aula 1

A aula foi iniciada pelo aplicativo Jitsi Meet às 9 horas com uma dinâmica de apresentação que o professor Eduardo conduziu com o intuito de interagir com os alunos, questionando o curso que desejavam ingressar no vestibular e o que eles entendiam por equação e função. Considerando que havia alunos de ensino médio e de graduação, as respostas obtidas no questionário de equação e função estão na Figura 1. As respostas mais comentadas foram as palavras que estão em destaque na imagem: "não lembro" e "esqueci". Além dessas, também foram obtidas respostas pertinentes ao conteúdo abordado como "relação entre conjuntos" e "cálculos com 1 ou 2 grandezas".

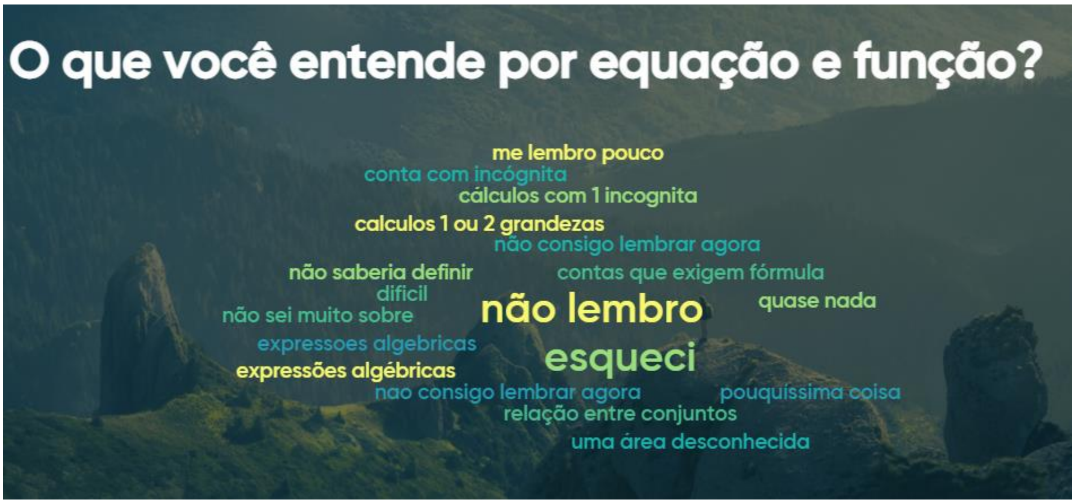

Figura 4:Respostas obtidas no Mentimeter.
Fonte: Próprio autor.

Após a dinâmica, foi disponibilizado por meio do software Microsoft Forms dois exercícios de vestibulares com o objetivo de introduzir os conceitos de equação e função. No primeiro problema:

1. (Unicamp) Após ter percorrido 2/7 de um percurso e, em seguida, caminhando 5/11 do mesmo percurso um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso. Qual o comprimento total do percurso?

Seja x o percurso total, sabemos que ele correu $\frac{2}{7}$ do percurso total, em seguida caminhou $\frac{5}{11}$ deste percurso e ainda faltavam 600 metros.

Com estas informações podemos montar uma equação para descobrir o valor do percurso total.

$$\frac{2}{7}x + \frac{5}{11}x + 600 = x$$

Encontrando frações equivalentes e resolvendo a equação

$$\frac{22}{77}x + \frac{35}{77}x - x = -600$$

$$\frac{20}{77}x = 600$$

$$x = 2310$$

Logo, o percurso total é de 2310 metros.

Foi percebido que os alunos tiveram dificuldades na resolução principalmente na manipulação com as frações, pois um aluno disse que tinha resolvido até a metade.

Já no segundo problema:

2. (UFMS-MS) Para custear seus estudos, um estudante oferece serviços de digitação de textos. O preço a ser pago pela digitação de um texto inclui uma parcela fixa e outra parcela que depende do número de páginas digitadas. Se a parcela fixa for de R$ 4,00 e cada página digitada custar R$ 1,60, quanto será a quantidade de páginas digitadas de um texto, cujo serviço de digitação custou R$ 39,20?

Resolução:

Podemos observar que ao variar a quantidade de folhas, vamos ter uma variação no preço, logo, o preço depende da quantidade de folhas.

Quadro 6: Quantidade de folhas e o respectivo preço a ser pago.

Quantidade de folhas	Preço R$
1	$1,6 \times 1 + 4 = 5,6$
2	$1,6 \times 2 + 4 = 7,2$
3	$1,6 \times 3 + 4 = 8,8$
4	$1,6 \times 4 + 4 = 10,4$
x	$1,6x + 4 = y$

Fonte: Próprio autor.

Como o serviço de digitação custou R$ 39,20, podemos encontrar a quantidade de folhas

$$1,6x + 4 = 39,20$$

$$1,6x = 35,20$$

$$x = 22$$

Logo, para o valor de R$ 39,20 foram digitadas 22 páginas.

Os alunos conseguiram responder facilmente. Esse fato pode ser observado pelas respostas obtidas conforme mostra a Figura 4.

Problema 1	Problema 2
2130 metros	22 paginas
840	8
600m	22
600m	22
2 quilômetros	50
2310 m	22 páginas digitadas
600m	22
2310m	22 pag
2310 m	22 páginas
600m, faltando pra percorrer.	Foram digitadas 22 páginas.
NÃO CONSEGUI	22 PÁG
1 100 METROS	22 PÁGINAS
Não consigo.	22 páginas.
Não consegui	22 páginas
2310	21
2.310m.	22 páginas.
2310 metros	22
2310 metros	22 páginas
?	22
2310 metros	22 paginas
2 310m	22

Figura 5:Respostas obtidas nos problemas 1 e 2.
Fonte: Acervo dos autores.

Nos seguintes questionamentos que abordaram grandezas, equações e funções feitos pela professora Fabiana, dois alunos responderam corretamente todas as perguntas. Os demais não interagiram, logo, percebeu-se que eles compreenderam a ideia envolvida em cada problema.

- O que vocês entendem por grandezas?

R: O que é grande. Uma medida de alguma coisa. Algo que eu consigo medir. O quão grande é algo.

- Como podemos mensurar essas grandezas? O que significa os números obtidos pelas grandezas?

R: Por régua, termômetro.

- O que podemos utilizar para representar as grandezas?

R: Unidades de medidas.

- Quais as grandezas envolvidas em cada problema proposto?

R: No primeiro problema metros e no segundo a quantidade de páginas.

Durante a explicação do professor sobre equação, função e conjuntos, os alunos permaneceram em silêncio, sem interação ou dúvidas. Após as explicações, foi disponibilizado um exercício seguinte para introduzir o conceito de variável dependente e independente.

3. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: $RS\ 5{,}00$ a bandeira mais $RS\ 1{,}20$ por quilômetro rodado, como mostra o quadro.

Quadro 7: Quilômetros rodados e o respectivo valor a ser pago.

Quilômetro (km) rodado	Valor a ser pago $(R\$)$
$0 \leq km < 1$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 0 = 5{,}00$
$1 \leq km < 2$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 1 = 6{,}20$
$2 \leq km < 3$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 2 = 7{,}40$
$3 \leq km < 4$	$5{,}00 + 1{,}20 \times 3 = 8{,}60$

Fonte: Próprio autor.

Observação: Consideramos aqui que o taxímetro se altera a cada quilômetro completo. Portanto, o valor pago varia aos saltos: $R\$\ 5{,}00$ antes de completar o 1º quilômetro; $R\$\ 6{,}20$ antes de completar o 2º; $R\$\ 7{,}40$ antes do 3º, etc.

d) Rita gastou $RS\ 23{,}00$ em uma viagem de táxi nessa cidade. Qual foi o número inteiro de quilômetros dessa viagem?

e) Qual das viagens de táxi, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros?

f) Qual será o valor da tarifa para uma quantidade q de quilômetros?

Foi observado que os alunos tiveram dificuldade na interpretação do problema, principalmente na parte em que envolvia o conceito de intervalo, pois um deles relatou que não estava conseguindo resolver, então o professor Edivaldo fez a correção do exercício. Após a correção não houve dúvidas e nem comentários por parte dos alunos.

Durante os seguintes questionamentos que o professor Eduardo fez sobre variável dependente e independente dois alunos responderam corretamente as perguntas.

- Quantas grandezas estão envolvidas no problema? Quais são elas?

R: Estão envolvidas duas grandezas, a quantidade de quilômetros rodados e o custo a pagar.

- O que podemos afirmar sobre o valor a ser pago pela viagem quando o número de quilômetros rodados aumenta?

R: O valor a ser pago também aumenta.

- É possível observar uma relação entre o valor a ser pago pela viagem e o número de quilômetros rodados?

R: Sim.

- Quando uma variável é determinada a partir de outra, como o valor da tarifa no caso do problema, como podemos chamar essa variável? E quanto a variável pré-determinada, como a quantidade de quilômetros, como ela é chamada?

R: Dependente, independente.

Foi deixado o seguinte exercício como tarefa conforme foi planejado.

4. (Unioeste, 2019) Em determinado país, o imposto de renda I é calculado sobre a renda R de um cidadão segundo a seguinte fórmula: $I = Rt - D$, onde t é uma taxa ou porcentagem e D é um valor a deduzir. Os valores de t e D variam de acordo com o valor da renda do cidadão, conforme o quadro a seguir, expressa em unidades monetárias do país.

Faixa de Renda (R)	Taxa (t) a ser aplicada	Dedução (D)
$0 \leq R < 3.000,00$	0	0
$3.000,00 \leq R < 5.000,00$	0,1	300,00
$5.000,00 \leq R < 10.000,00$	0,2	800,00
$R \geq 10.000,00$	0,25	1.300,00

Figura 6: Variação dos valores de t e D de acordo com R.
Fonte: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores

O restante da aula foi destinado para tirar dúvidas sobre o conteúdo e as questões. Os alunos não apresentaram nenhuma dúvida, mas como foi percebido que os alunos tinham dúvidas na manipulação de frações do problema 1, o professor Eduardo retomou a explicação do problema, especificamente sobre a parte de mínimo múltiplo comum.

Algumas dificuldades foram encontradas na execução da aula, dentre elas estão a dificuldade no acesso da sala por parte de alguns alunos.

4.2 Módulo/encontro 2 -

4.2.1 Plano de aula

Conteúdo: Função afim e função quadrática.

Público-Alvo: Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir a ideia de função afim e função quadrática juntamente com os conceitos de função crescente, decrescente e sinal da função.

Objetivos específicos: Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Fazer a distinção entre função afim e função quadrática.
- Determinar a lei de formação das funções afim e quadrática.
- Entender como determinar os zeros das funções afim e quadrática

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Slides em Sway, Kahoot, caneta e papel, Jitsi.

Encaminhamento metodológico:

-Função Afim

Será disponibilizado no chat do Jitsi, para os alunos, um link que dá acesso a um formulário online com os exercícios a seguir. O intuito é que os alunos identifiquem as funções afim e quadrática que estão envolvidas no problema.

1. O esquema a seguir representa a vista superior de uma quadra de vôlei de praia, construída em um terreno retangular.

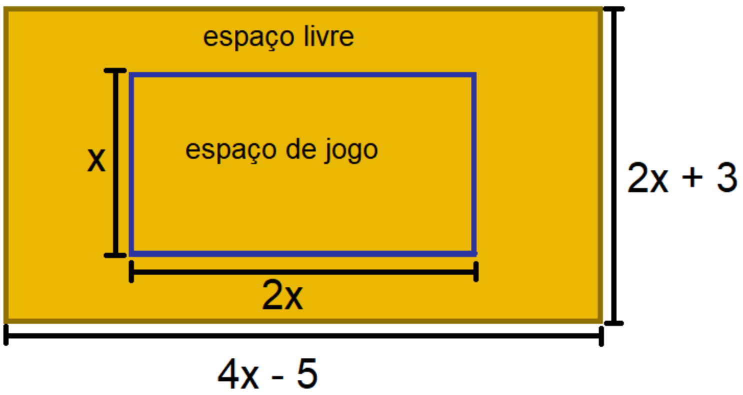

Figura 7: Espaço livre e de jogo de uma quadra de vôlei.
Fonte: Próprio autor.

a) Sabendo que o perímetro correspondente ao espaço do jogo é de 30 m, qual é a largura desse espaço?

b) Utilizando a mesma largura encontrada no item a., determine o perímetro do espaço livre.

c) Considerando as medidas fornecidas na imagem, determine a lei de formação da função que fornece o perímetro de cada espaço.

d) No contexto do problema, que se trata de medidas, faria sentido um valor para x tal que o perímetro do espaço livre fosse igual a zero?

e) Levando em consideração apenas a lei de formação da função $p = 12x - 4$, para qual valor de x resultaria em $p = 0$.

Resolução:

a) Para encontrar a largura devemos encontrar o valor de x.

Sabemos que o perímetro é a medida do contorno do espaço do jogo. Logo,

$$p = x + x + 2x + 2x$$

Como sabemos que o perímetro vale $30\ m$:

$$30 = x + x + 2x + 2x$$

$$\Rightarrow 30 = 6x$$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{6}$$

$$\Rightarrow x = 5\ m$$

Desse modo, a largura do espaço livre é de 5 metros.

b) Para encontrarmos o perímetro do espaço livre devemos somar a medida de todos os lados:

$$pe = 2(4x - 5) + 2(2x + 3)$$

como a largura encontrada no item a. foi de 5 metros:

$$pe = 2(20 - 5) + 2(10 + 3)$$

$$\Rightarrow pe = 2 \times 15 + 2 \times 13$$

$$\Rightarrow pe = 30 + 26$$

$$\Rightarrow pe = 56\ m$$

O perímetro do espaço livre é de 56 metros.

c) A lei de formação para o perímetro do espaço do jogo:

$$p = 2x + 2(2x)$$

$$\Rightarrow p = 2x + 4x$$

$$\Rightarrow p = 6x$$

A lei de formação para o perímetro do espaço livre:

$$pe = 2(4x - 5) + 2(2x + 3)$$

$$\Rightarrow pe = 8x - 10 + 4x + 6$$

$$\Rightarrow pe = 12x - 4$$

d) Como estamos tratando de medidas de comprimento, não há sentido no contexto do problema existir um perímetro igual a zero, pois se o perímetro fosse zero não existiria o espaço de jogo e o espaço livre.

e)

$$p = 12x - 4$$

Para $p = 0$

$$\Rightarrow 0 = 12x - 4$$
$$\Rightarrow 4 = 12x$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{12}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Logo, o valor para zerar a função é igual a $\frac{1}{3}$.

Será dado um tempo para que os alunos resolvam o exercício proposto, sendo posteriormente corrigido juntamente com a turma. Espera-se que eles consigam determinar a lei de formação da função que corresponde ao perímetro dos dois espaços. Durante as correções serão realizados alguns questionamentos:

- Há uma relação de dependência entre as medidas fornecidas em cada espaço com seus respectivos perímetros?

R: Sim, enquanto uma cresce a outra cresce também.

- Para um retângulo qualquer de largura l e comprimento c, como é calculado seu perímetro?

R: $perímetro = 2largura + 2comprimento$

- Qual é a variável dependente no cálculo do perímetro? E a independente?

R: A dependente é o perímetro, enquanto a independente é x que é um dos lados do retângulo.

Após as discussões, será formalizado o conceito de função afim.

Para explicar os coeficientes da função afim, serão retomados os dados do exercício da seguinte forma:

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. a e b são chamados de coeficientes.

Comparando a função correspondente ao perímetro de cada espaço com a lei de formação da função afim, temos:

a)

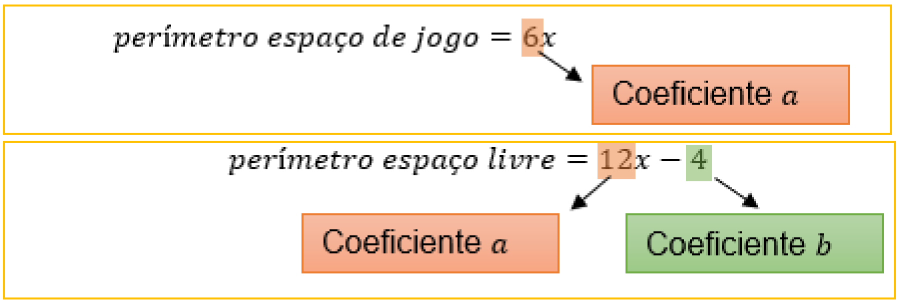

Figura 8:Coeficientes das equações dos perímetros.
Fonte: Próprio autor.

b) Para a função do perímetro do espaço de jogo, temos que o coeficiente b é zero, podendo assim ser chamada de **função linear**.

c) Quando $a = 1$ e $b = 0$: a função é chamada de **função identidade**.

Observação: Quando $a = 0$, a função por definição não é considerada afim e passa a ser chamada de função constante.

- Zero da função afim

Para explicar como obter o zero da função afim, será retomado o item e. do exercício 1. Será feito da seguinte forma:

Visto que o exercício pede para encontrarmos a medida de x que zere a função, temos que o valor de x para que isso aconteça é igual a $\frac{1}{3}$. Desse modo, para encontrar o zero da função afim, basta igualar a função a zero. De modo genérico, temos:

Para quaisquer números reais a e b,

$$f(x) = ax + b$$
$$\Rightarrow 0 = ax + b$$

$$\Rightarrow -b = ax$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

- Função quadrática

Para introduzir o conceito de função polinomial do segundo grau, serão utilizados os mesmos dados do exercício 1 proposto e serão feitas as seguintes perguntas:

a) Qual é o comprimento do espaço do jogo considerando uma área de $128\ m^2$?

b) Considerando que a área do espaço do jogo seja de 98 m^2, determine o comprimento do espaço livre.

c) Qual é o valor da área do espaço livre considerando o comprimento encontrado no item anterior?

d) Considerando as dimensões dadas pelo exercício, qual é o valor da área de cada espaço dado?

Resolução:

f) A área do espaço de jogo é dada por $A = base \times altura = 2x.x$.

Para uma área de 128 m^2 temos, $128 = 2x^2 \Rightarrow 64 = x^2 \Rightarrow x = 8$ ou $x = -8$, como se trata de uma medida, o x deve ser de 8 metros.

g) Para a área de jogo igual 98 m^2 temos, $98 = 2x^2 \Rightarrow 49 = x^2 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -7$. Novamente vamos considerar $x = 7$.

A base do espaço livre é $4x - 5$ e a altura $2x + 3$, para $x = 7$ temos, a base igual a $4x - 5 \Rightarrow 4.7 - 5 = 23$ e a altura $2x + 3 \Rightarrow 2.7 + 3 = 17$.

h) A área do espaço livre com as medidas encontradas no item anterior é $A = base \times altura = 23.17 = 391m^2$.

i) A área do espaço de jogo $A_j = 2x.x = 2x^2$, a área de todo o terreno $A_t = (4x - 5)(2x + 3) = 8x^2 + 12x - 10x - 15 = 8x^2 + 2x - 15$.

A área do espaço livre é $A_l = A_t - A_j = (8x^2 + 2x - 15) - 2x^2 = 6x^2 + 2x + 15$.

Será dado um tempo para que os alunos resolvam as perguntas propostas, sendo posteriormente corrigido juntamente com a turma. Espera-se que eles consigam determinar a lei de formação da função que corresponde às áreas dos dois espaços. Durante as correções serão realizados alguns questionamentos:

- Há uma relação de dependência entre as medidas de largura e comprimento com a área?

R: Sim, pois considerando que os dois espaços dados pelo exercício são da forma retangular, a área é dada pelo produto entre o comprimento e a largura, desse modo, a área depende das medidas de largura e comprimento para ser determinada.

- A área e o perímetro possuem alguma relação de dependência? Por quê?

R: R: Não possuem relação de proporcionalidade, podemos pensar na área de um quadrado de lado 3, se existisse proporcionalidade ao dobrar o lado do quadrado também dobraria sua área.

Quadrado de lado 3, a área é 9 e o perímetro é 12.

Quadrado de lado 6, a área é 36 e o perímetro é 24.

- Qual a diferença entre o cálculo da área e o cálculo do perímetro?

R: No perímetro somam os lados e na área os lados são multiplicados para o caso de uma área ou figura retangular.

Após as discussões e resoluções, será formalizado o conceito de função quadrática.

Uma função: f: ℝ → ℝ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais a, b e c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in$ ℝ. Os números reais a, b e c são chamados de coeficientes.

-Zeros da função quadrática

Para encontrar os zeros da função quadrática, serão feitas as seguintes perguntas aos alunos:

- Faria sentido no contexto do problema, existir uma medida x tal que a área do terreno fosse zero? Por quê?
- Considerando apenas a lei de formação da função, qual valor de x zera a função?

Novamente, não há sentido ter uma área igual a zero, mas considerando apenas a lei de formação da função podemos encontrar valores de x que zere a função.

Da mesma forma em que foi realizado para encontrar o zero da função afim, devemos igualar a função quadrática a zero, obtendo a seguinte equação:

$$0 = 8x^2 + 2x - 15$$

Podemos encontrar as raízes da função quadrática utilizando a fórmula resolutiva.

Utilizando esta fórmula obtemos as raízes da equação quadrática por seus coeficientes.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$
$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

Primeiro identificamos cada coeficiente a, b e c, calculamos Δ que é chamado de discriminante e então, encontramos as raízes x_1 e x_2.

Para a equação $0 = 8x^2 + 2x - 15$ temos, $a = 8$, $b = 2$ e $c = -15$.

$$\Delta = (2)^2 - 4.(8).(-15) = 4 + 480 = 484$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2.8}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{484}}{2.8} = \frac{-2 + 22}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{484}}{2.8} = \frac{-2 - 22}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

De acordo com o **discriminante da equação**, temos que:

- $\Delta > 0$, então a função tem duas raízes diferentes, $x_1 \neq x_2$
- $\Delta = 0$, então a função tem apenas uma raiz real x.
- $\Delta < 0$, então a função não tem raízes reais.

Após a explicação sobre a fórmula resolutiva, será proposto aos alunos um desafio que será resolver o exercício 3 com o intuito de explicar o método de soma e produto para encontrar as raízes de uma função polinomial de segundo grau:

e) Seja f a função quadrática dada por $f(x) = x^2 - (k + 2)x + (2k + 4)$. Sabendo que os zeros de f são diferentes e que um zero é o dobro do outro, determine o valor de k, com $k \in \mathbb{Z}$, e dos zeros dessa função.

Resolução:

Sabemos que uma raiz é o dobro da outra, ou seja,

$$x_2 = 2x_1 \qquad (01)$$

Pelo fato de $x_1 \neq x_2$, temos que $\Delta > 0$ com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Desse modo, podemos encontrar as raízes pelo método soma e produto.

Pela soma temos:

$$s = x_1 + x_2$$
$$\Rightarrow s = x_1 + 2x_1$$
$$\Rightarrow s = 3x_1$$
$$\Rightarrow (k + 2) = 3x_1$$
$$\Rightarrow k = 3x_1 - 2 \qquad (02)$$

Pelo produto, temos:

$$p = x_1 \cdot x_2$$
$$\Rightarrow p = x_1 \cdot 2x_1$$
$$\Rightarrow p = 2x_1^2$$
$$\Rightarrow 2k + 4 = 2x_1^2$$
$$\Rightarrow k = \frac{2x_1^2 - 4}{2}$$
$$\Rightarrow k = x_1^2 - 2 \qquad (03)$$

Igualando as equações (02) e (03):

$$3x_1 - 2 = x_1^2 - 2$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 3x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1(x_1 - 3) = 0 \begin{cases} x_1' = 0 \\ x_1'' = 3 \end{cases}$$

Como $x_1 \neq x_2, x_1 = 0$ não convém, logo, $x_1 = 3$. Para encontrar k, basta substituirmos o valor de x_1 em uma das equações obtidas por soma e produto. Utilizando a equação encontrada pela soma:

$$k = 3x_1 - 2$$

$$\Rightarrow k = 3 \cdot 3 - 2$$

$$\Rightarrow k = 7$$

Para encontrar a segunda raiz, basta substituirmos x_1 em (01):

$$x_2 = 2x_1$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow x_2 = 6$$

Após um tempo para a resolução, serão discutidas as respostas obtidas pelos alunos e será perguntado se eles conhecem a forma de resolução por soma e produto das raízes da equação de segundo grau. Após a discussão, será explicado a forma de resolução por soma e produto e então será corrigido o exercício juntamente com a turma.

Se uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui dois zeros, ou seja, se $\Delta \geq 0$, então esses zeros são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim, a soma s e o produto p desses zeros são:

Soma:

$$s = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow s = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow s = -\frac{2b}{2a}$$

$$\Rightarrow s = -\frac{b}{a}$$

Produto:

$$p = x_1 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow p = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow p = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow p = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$\Rightarrow p = 4ac/4a^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{c}{a}$$

Após a explicação do método da soma e produto, vamos apresentar funções quadráticas em que $b = 0$, $c = 0$ ou também b e c são iguais a zero.

Nos casos em que $\boldsymbol{b = 0}$, $\boldsymbol{c = 0}$ ou também $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são iguais a zero temos funções quadráticas do tipo.

a. Quando $b = 0$ temos a função $f(x) = ax^2 + c$
b. Quando $c = 0$ temos a função $f(x) = ax^2 + bx$
c. Quando $b = 0$ e $c = 0$ temos a função $f(x) = ax^2$

Quando temos funções quadráticas dessa forma a resolução pode ser feita da seguinte maneira:

- Para $ax^2 + c = 0$,

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Para $ax^2 + bx = 0$,

$$ax^2 + bx = 0$$

Podemos por x em evidência, obtendo

$$x(ax + b) = 0$$

Podemos observar que $x(ax + b) = 0$ quando $x = 0$ ou $ax + b = 0$
Logo, encontramos um zero da função que é $x = 0$ e basta resolver $ax + b = 0$.

$$ax + b = 0$$
$$\Rightarrow ax = -b$$
$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

- Para $ax^2 = 0$,

$$ax^2 = 0$$

Como sabemos que $a \neq 0$, podemos dividir por a ambos os lados da equação, obtendo

$$x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{0}$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Exercícios:

2. (Unioeste, 2017) A função definida por $f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$, onde a, b e c são constantes reais, representa quanto José tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos dias. Assim, x é um número natural tal que $1 \leq x \leq 31$ e $f(x)$ é o valor, em reais, que José tinha em sua carteira no final do dia x. Da mesma forma, a função $g(x) = mx + n$ onde m e n são constantes reais, representa quanto Paulo tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Sabe-se que no final do:

- Primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras.
- Segundo dia, Paulo tinha R$ 7,00.
- Dia 16, José tinha R$ 120,00.
- Dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

Com base nestas informações, é CORRETO afirmar que

A) Ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é $S = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1)$.

B) Ao final do dia 18, José tinha R$ 5,00 a mais do que Paulo.

C) A expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo têm na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

D) $f(x) = -x^2 + 32x - 31$.

E) Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

Resolução:

Para o primeiro dia devemos igualar as funções f e g a zero, obtendo as equações

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 0$$

$$mx + n = 0$$

Como isto ocorre no primeiro dia, então $x = 1$

$$a(1-1)^2 + b(1-1) + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$m1 + n = 0 \Rightarrow n = -m$$

Para o segundo dia temos que $x = 2$ e $g(2) = 7$

$$2m + n = 7 \Rightarrow 2m + (-m) = 7 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow n = -7$$

Logo $g(x) = 7x - 7$.

Para o décimo sexto dia, $x = 3$ e $f(16) = 120$

$$a(16-1)^2 + b(16-1) = 120$$

$$15^2 a + 15b = 120$$

$$225a + 15b = 120$$

Para o dia 31, $x = 31$ e $f(31) = 0$

$$a(31-1)^2 + b(31-1) = 0$$

$$30^2 a + 30b = 0$$

$$900a + 30b = 0 \Rightarrow b = -\frac{900}{30}a \Rightarrow b = -30a$$

Substituindo $b = -30a$ em $225a + 15b = 120$ obtemos

$$225a + 15(-30a) = 120$$

$$225a - 450a = 120$$

$$-225a = 120$$

$$a = -\frac{120}{225} = -\frac{24}{45} = -\frac{8}{15}$$

Como obtemos $a = -\frac{8}{15}$ e $b = -30a$, logo $b = 16$.

Logo, $f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$

Para um dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é

$$S = 7x - 7 - \frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$$

$$= 7(x-1) - \frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$$

$$= -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1).$$

Logo a alternativa correta é a letra A.

Vamos conferir as alternativas restantes.

Para o item B, podemos substituir o valor $x = 18$ nas funções f e g.

Paulo

$$g(x) = 7x - 7$$

$$g(18) = 7(18) - 7 = 119$$

José

$$f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$$

$$f(x) = -\frac{8}{15}(18-1)^{02} + 16(18-1)$$

$$-\frac{8}{15}(17)^2 + 16(17) = -\frac{8}{15}289 + 16(17)$$

$$-\frac{2312}{15} + 272 = -154{,}13 + 272 = 117{,}86$$

Percebemos que José não possuía mais dinheiro que Paulo no final do dia 18.

O item C não pode estar certo pois encontramos que a função que descreve a soma dos valores que José e Paulo têm na carteira no dia x é um polinômio de grau2.

O item D está errado pois

$$f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$$

$$= -\frac{8}{15}(x^2 - 2x + 1)^2 + 16x - 16$$

$$-\frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{15}x - \frac{8}{15} + 16x - 16$$

$$= -\frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{15}x + \frac{16.15}{15}x - \frac{8}{15} - \frac{16.15}{15}$$

$$= -\frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{15}x + \frac{240}{15}x - \frac{8}{15} - \frac{240}{15}$$
$$= -\frac{8}{15}x^2 + \frac{256}{15}x - \frac{248}{15}$$

Para o item E, podemos observar que no dia 31 José não tinha dinheiro em sua carteira, já Paulo possuía $g(31) = 7(31) - 7 = 217 - 7 = 210$. Logo, o item E está errado.

3. (UNIFRA, 2013) A 50 metros de altura, cai um tijolo da mão de um pedreiro. A distância desse tijolo, em relação ao solo, em cada momento da queda pode ser calculada pela fórmula matemática $D(t) = 50 - 5t^2$, onde t indica o tempo, em segundos, e D a distância, em metros. Assim, o tempo que esse objeto levou para atingir o solo foi:

Resolução:

Observemos que a fórmula $D(t) = 50 - 5t^2$ que permite calcular a distância do tijolo, em relação ao solo, em cada momento da queda é uma função quadrática.

No momento em que o tijolo atingir o solo, essa distância será igual a zero.

Logo,

$$D(t) = 0$$

Assim temos,

$$D(t) = 0 \Rightarrow 50 - 5t^2 = 0$$
$$\Rightarrow 50 = 5t^2$$
$$\Rightarrow 10 = t^2$$
$$\pm\sqrt{10} = t$$

Logo, $t = \sqrt{10}$ ou $t = -\sqrt{}10$, como sabemos que não existe valores negativos para o tempo, concluímos que o tempo que esse objeto levou para atingir o solo foi $t = \sqrt{10}$ segundos.

Ao final da aula será realizado um *quiz* no aplicativo Kahoot com as seguintes questões.

4. Identifique a(s) função(ões) afim:

a) $f(x) = 2x$;

b) $f(g) = 5$;

c) $f(d) = \frac{1}{d} + 2$;

d) $f(m) = \frac{1}{2}m + 2$.

5. Quais são os coeficientes a e b da função afim $f(x) = 2(x - 2) + 3(x + 7)$, respectivamente?

a) 2 e 3;

b) 5 e 17;

c) $(x-2)$ e $(x+7)$;

d) Não é uma função afim.

6. Sabendo que $f(x) = mx + 2$ e $f(-3) = 14$, determine o valor de m.

a) 4;

b) -4;

c) 7;

d) -7;

7. O valor a ser pago por uma mercadoria de valor m, após um desconto de 15% pode ser dado por:

a) $f(m) = m - 0{,}15$;

b) $f(m) = -0{,}15m$;

c) $f(m) = 0{,}85m$;

d) $f(x) = 1{,}15m$;

8. Quais das funções a seguir são funções polinomiais do segundo grau?

a) $g(x) = x^2 - x$;

b) $m(z) = (x+6)^3$;

c) $d(k) = \sqrt{k} + 2$;

d) $h(t) = t^2 + \sqrt{7}$;

9. O valor p em reais por acre $(4047m^2)$ de uma produção de trigo, d dias depois de plantado, é dado por $p = 12d - 0{,}05d^2$, com $20 < d < 80$. Quantos dias depois de plantado o trigo obtém-se $p = 400$?

a) 50 dias;

b) 32 dias;

c) 40 dias;

d) 24 dias;

10. Para que uma função do tipo$y = ax^2 + bx + c$ seja quadrática, o coeficiente de x^2 deve ser:

a) Igual a zero;

b) a;

c) Não nulo;

d) Positivo;

11. As funções $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $q(z) = 8z^2 + z - 2$ possuem duas raízes distintas.

a) Verdadeiro;

b) Falso;

Avaliação

A avaliação será feita durante a aula com base nas respostas e interação dos alunos conforme os exercícios e indagações propostas a eles.

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES. D. **Quadrante: Matemática 1**. São Paulo: SM, 2016.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática 1.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

UNIOESTE. **Provas anteriores.** Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores>. Acesso em: 10 mar. 2021.

KAHOOT. Disponível em: <https://kahoot.com/?utm_name=controller_app&utm_source=controller&utm_campaign=controller_app&utm_medium=link>. Acesso em: 10 mar. 2021.

4.2.2 Relatório da aula 2

No dia 13 de março, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jitsi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:45 abrimos a sala e logo alguns alunos começaram a entrar. Iniciamos no horário marcado com a presença de 18 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, embora no encontro anterior houvesse 26 alunos presentes.

A aula foi iniciada com um exercício, envolvendo os conceitos de perímetro e área, disponibilizado em um formulário on-line no Forms, para introduzir função afim e função quadrática. Percebeu-se, pela pouca interação e o número baixo de respostas corretas ao formulário, que os alunos apresentavam dificuldades nas fórmulas de área e perímetro, e também, em matemática básica. Por exemplo, foi questionado por um aluno como subtrair $2x^2$ de $8x^2$.

Observamos que o formulário disponibilizado no *Microsoft Forms* poderia ter sido melhor aproveitado, caso os professores tivessem olhado as respostas dadas pelos alunos e debatido sobre elas.

Quando questionamos os alunos quanto à relação de dependência existente entre as medidas de comprimento e largura com perímetro, um aluno respondeu que quanto maior essas medidas, maior será o perímetro. Por essas respostas notamos que foram compreendidos os conceitos de variável dependente, variável independente e relação de dependência abordados na primeira aula.

Ao tratar do item i) do exercício 1, o qual envolvia encontrar as leis de formação das funções que determinavam as áreas de cada espaço dado na imagem do exercício, foram encontradas a área do espaço do jogo, terreno total e do espaço livre sendo $A_j = 2x.x = 2x^2$, $A_t = 8x^2 + 2x - 15$ e $A_l = 6x^2 + 2x + 15$,respectivamente. Nesse momento, um dos alunos perguntou se a resolução estava terminada, se não deveria ainda ser usada a fórmula de Bhaskara. Explicamos que o objetivo da questão era apenas encontrar a lei de formação da função que descrevia a situação, e que não havia necessidade de encontrar as raízes da função. Ressaltamos que a fórmula de Bhaskara serve para encontrar as raízes de uma função quadrática, o que não era objetivo do exercício.

Ficou-nos a impressão que os alunos entendem que resolver uma situação que envolve uma equação quadrática significa, necessariamente, ou somente, achar as raízes.

Uma boa estratégia adotada nessa aula foi a utilização do quiz *Kahoot*, com o qual foi possível revisar, reforçar e avaliar a aprendizagem do conteúdo trabalhado durante a aula, pois as atividades preparadas perguntavam sobre função afim e função quadrática. No decorrer da atividade proposta, percebeu-se que a interação foi maior em razão da dinâmica do quiz. Foi resolvido uma situação problema a seguir presente no *quiz*, a qual os alunos encontraram maior dificuldade.

O valor p em reais por acre $(4047m^2)$ de uma produção de trigo, d dias depois de plantado, é dado por $p = 12d - 0{,}05d^2$, com $20 < d < 80$. Quantos dias depois de plantado o trigo obtém-se $p = 400$?

Foi resolvido utilizando a fórmula de Bhaskara, mas também foi comentado que pode ser resolvida por tentativa e erro, substituindo as alternativas na lei de formação da situação tratada.

O conteúdo de soma e produto, bem como os exercícios 3 e 4, que não foram vistos em sala, foram disponibilizados de forma assíncrona, em razão da falta de tempo decorrente das dúvidas dos discentes sobre o exercício resolvido.

4.3 Módulo/encontro 3 -

4.3.1 Plano de aula

Conteúdo:

Funções crescente, decrescente, constante e gráfico de uma função afim e quadrática.

Objetivo geral:

Introduzir os conceitos relativos à função crescente, decrescente, constante e gráfico de função afim e função quadrática.

Objetivos específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Analisar crescimento e decrescimento das funções afins e quadráticas;
- Realizar o estudo dos sinais de funções;
- Classificar as funções afins em crescente, decrescente e constante;
- Identificar gráfico de função afim e quadrática;
- Resolver e interpretar problemas que envolvam gráficos de funções afins e quadráticas.
- Identificar a concavidade de uma parábola.

Tempo de execução:

Um encontro de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

GeoGebra, caneta, papel, *slides*, formulários *online*, Jitsi, Mentimeter e quadro.

Encaminhamento metodológico:

Para iniciar a aula, utilizaremos a plataforma Mentimeter para realizar uma dinâmica, em que os estudantes responderão algumas perguntas de múltipla escolha. Os alunos irão escolher a resposta que eles consideram ser correta, sendo o vencedor aquele que acertou a maioria das respostas. Será enfatizado que em momentos oportunos do decorrer da aula vai ser evidenciado quais são as respostas corretas e discutidas algumas das respostas erradas. As perguntas disponibilizadas no Mentimeter serão:

- Uma função afim sempre pode ser representada graficamente por uma reta. Verdadeiro ou falso?

R: Verdadeiro.

- Uma função afim intercepta o eixo y no valor do termo independente (b). Verdadeiro ou falso?

R: Verdadeiro.

- Uma função quadrática intercepta o eixo y no valor do termo independente (c). Verdadeiro ou falso?

R: Verdadeiro.

- Em uma função afim $f(x) = ax + b$, se $a > 0$ então o gráfico de f é decrescente. Verdadeiro ou falso?

R: Falso

- O sinal de uma função é positivo para todos os valores de x que que fazem $f(x) > 0$. Verdadeiro ou falso?

R: Verdadeiro.

- Se $a > 0$ então a parábola possui concavidade voltada para baixo. Verdadeiro ou falso?

R: Falso.

- (Unicamp, 2016) O gráfico a seguir exibe o lucro líquido (em milhares de reais) de três pequenas empresas A, B e C, nos anos de 2013 e 2014.

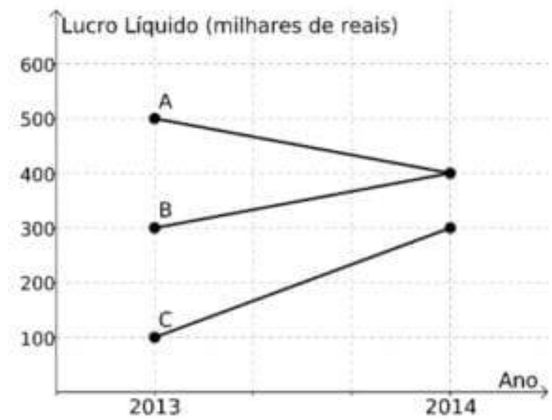

Figura 9: Gráfico com o lucro líquido de três empresas A, B e C.
Fonte: https://educacionalplenus.com.br/resolucao-unicamp-2016-1a-fase-matematica/

Com relação ao lucro líquido, qual das empresas teve maior crescimento neste período?

a) A; b) B; c) C.

R: Observemos que a empresa A teve um decrescimento de R$ 100.000, em 2013 tinha lucro de R$ 500.000 e em 2014 um lucro de R$ 400.000.

A empresa B teve crescimento de R$ 100.000, em 2013 tinha R$ 300.000 e em 2014 R$ 400.000.

A empresa C teve um crescimento de R$ 200.000, em 2013 tinha R$ 100.000 e em 2014 R$ 300.000.

Logo, a empresa que obteve maior crescimento foi a empresa C. Alternativa c).

- Qual lei de formação é representada pelo gráfico da empresa que obteve maior crescimento no lucro?

a) $y = -100x + 201800$; b)$y = 100x - 201000$; b)$y = 200x - 402500$.

R: Alternativa c. Testando os valores para x e y do gráfico, temos:

Para $x = 2013$

$$y = 200 \times 2013 - 402500$$
$$\Rightarrow y = 402600 - 402500$$
$$\Rightarrow y = 100$$

Para $x = 2014$

$$y = 200 \times 2014 - 402500$$
$$\Rightarrow y = 402800 - 402500$$
$$\Rightarrow y = 300$$

Em seguida serão realizados alguns questionamentos, sendo introduzido o conceito de gráfico de uma função.

- Analisando a lei de formação da função que representa o comportamento do lucro e comparando com o gráfico dado, o que significa o valor x da lei de formação? Há mais de um valor de y relacionado com $x = 2013$ nessa lei de formação?

R: O ano. Não, somente o valor 100.

- Caso fôssemos calcular o lucro obtido nos anos seguintes, continuaria sendo uma reta o gráfico dessa função?

R: Sim, pois possui um crescimento constante.

-Gráfico da função afim

Após a discussão do exercício vamos apresentar a definição de gráfico de função afim.

O gráfico de uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, onde a e $b \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$, é uma reta não perpendicular e não paralela ao eixo x. Assim, para traçar o gráfico de uma função afim é suficiente definir apenas dois pontos.

Como em uma função, ao atribuir um valor para a variável x, obtemos apenas um valor para y, podemos escrever os pontos do gráfico de uma função como pares ordenados (x, y).

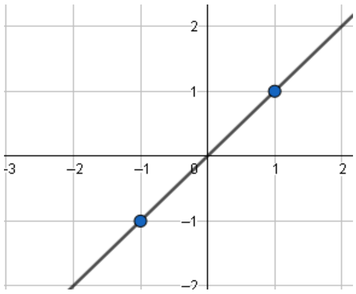

Figura 10: Gráfico de uma função crescente.
Fonte: Próprio autor.

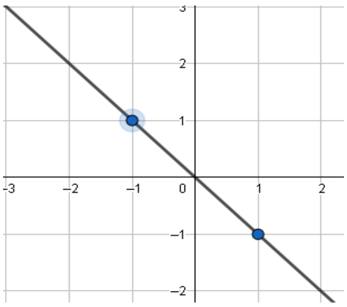

Figura 11:Gráfico de uma função crescente.
Fonte: Próprio autor.

Vocês já ouviram falaram na palavra coeficiente angular?

- O que esta palavra representa para vocês (coeficiente angular)?

Neste momento é esperado que os alunos digam que a palavra expressa um sentido de ângulo, que pode dar uma direção (crescente ou decrescente).

- Nesta expressão a seguir temos uma função afim, que apresenta um coeficiente angular, vocês conseguem identificar?

$$f(x) = ax + b$$

Dada uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, a,$b \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$, o coeficiente a, é chamado **coeficiente angular** ou **declividade da reta** e está ligado à sua inclinação em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ das abscissas. E o **coeficiente linear** b é chamado **termo independente** da função e indica onde o gráfico corta o eixo y.

Neste momento iremos utilizar o Geogebra na construção do gráfico de uma função afim, alterando os valores dos coeficientes a e b separadamente, após isso utilizaremos o controle deslizante para cada coeficiente com o intuito de evidenciar o papel desses coeficientes no gráfico.

Exercício

1. O gráfico representa o consumo de energia elétrica y em quilowatt-hora de um equipamento em função do tempo x em horas de funcionamento.

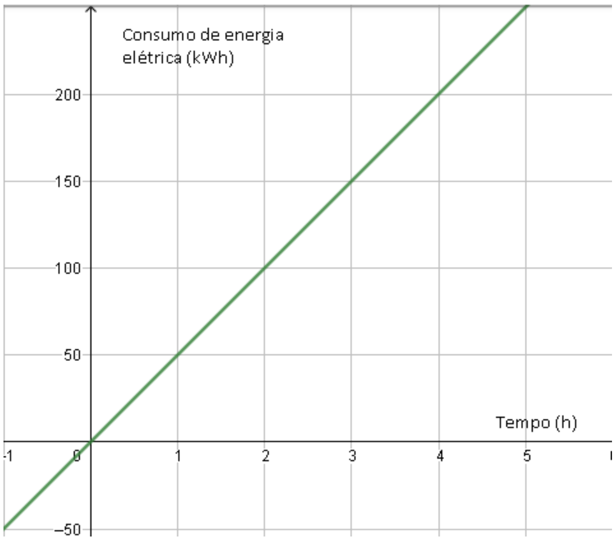

Figura 12: Gráfico do consumo de energia elétrica.
Fonte: Próprio autor.

a) Com as informações do gráfico, construa um quadro com pelo menos três valores de consumo de energia desse equipamento pelo tempo de funcionamento.

b) Qual o consumo de energia elétrica desse equipamento em 3 horas de funcionamento?

c) Escreva uma função que permita calcular o consumo de energia elétrica desse equipamento em função do tempo de funcionamento.

d) Calcule e represente como pares ordenados o consumo de energia elétrica desse equipamento caso ele fique ligado por:

- $6h$;
- $8.5h$;
- $15.5h$.

Resolução:

a)

Quadro 8: Valores do consumo de energia e o seu respectivo tempo.

x	y
0	0
1	50
2	100
3	150
4	200

Fonte: Próprio autor.

b) Podemos localizar no gráfico, quando com 3 horas de funcionamento é gasto $150\ kWh$.

c) Sabendo que uma reta é o gráfico de uma função afim $y = ax + b$, podemos substituir valores de y e x que temos no gráfico e encontrar os coeficientes a e b. Vamos escolher os pontos (0,0) e $(1{,}50)$.

$$0 = a.0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$1 = a.50 + 0 \Rightarrow a = 50$$

Logo a função é $y = 50x + 0 \Rightarrow y = 50x$.

d) Podemos utilizar a função encontrada no item c.

Para $6h$, $y = 50.6 = 300 \rightarrow (6{,}300)$.

Para $8.5h$, $y = 50(8.5) = 425 \rightarrow (8.5{,}425)$.

Para $15.5h$, $y = 50(15.5) = 775 \rightarrow (15.5{,}775)$.

-Gráfico de função quadrática

O gráfico de uma **função quadrática** f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

A parábola possui um **eixo de simetria**. No caso do gráfico de $y = 2x^2$, o eixo das ordenadas (eixo y) é o eixo de simetria.

O ponto em que o eixo de simetria e a parábola se cruzam é chamado de vértice, cujas coordenadas são indicadas por $V = (x_v, y_v)$.

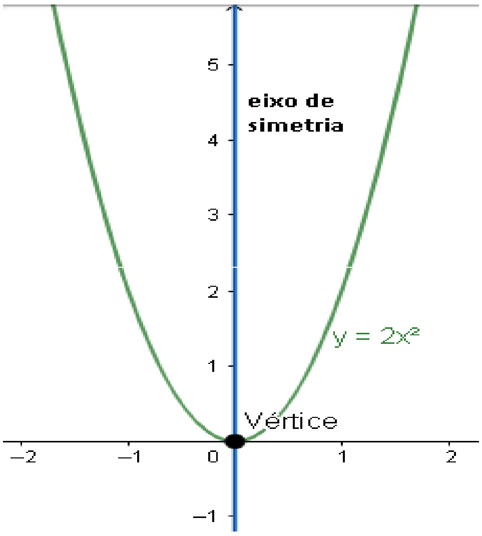

Figura 13: Gráfico de função quadrática.
Fonte: Próprio autor.

Para identificar a concavidade de uma parábola e a interseção com o eixo x, faremos a seguinte atividade:

- Com o auxílio do Geogebra vamos construir os gráficos das funções f, g, h e p definidas por $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = 2x^2$ e $p(x) = 3x^2 - 2$.

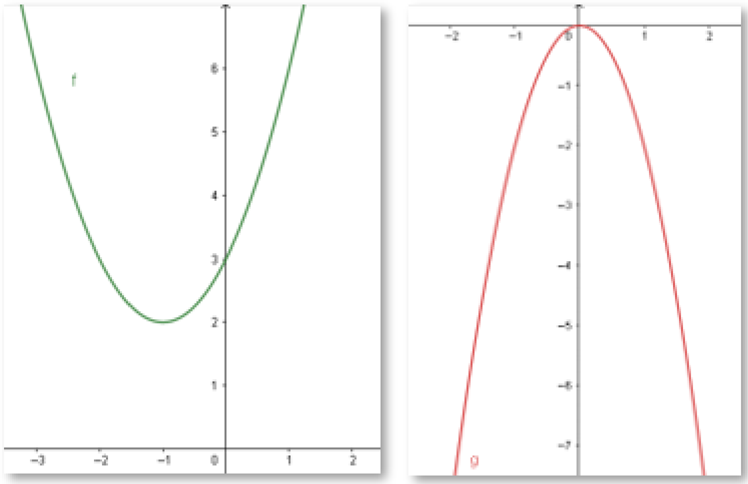

Figura 14: Gráficos das funções f e g respectivamente.
Fonte: Próprio autor.

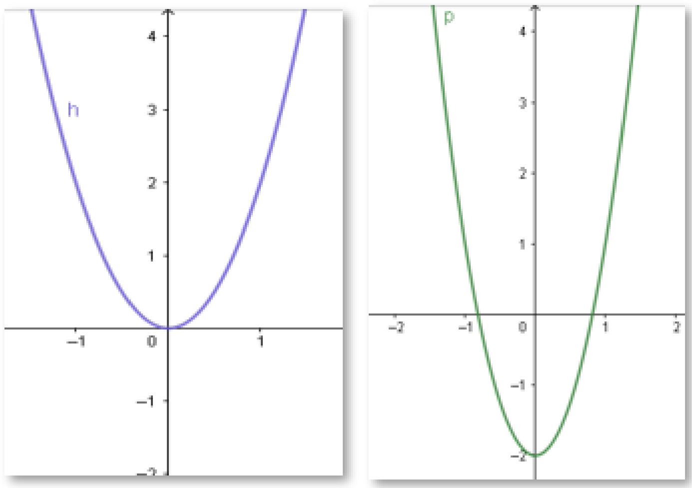

Figura 15: Gráficos das funções h e p respectivamente.
Fonte: Próprio autor.

Então faremos o seguinte questionamento:

- Analisando os gráficos destas funções, o que podemos dizer sobre os zeros das funções f, g, h e p? E sobre o discriminante?

R: Como o gráfico de f não intercepta o eixo x, então ela não possui zeros reais e o discriminante é negativo. Como o gráfico de g e h interceptam o eixo x em apenas um ponto, tanto a função g, como a função h possuem zeros reais iguais e ambos os discriminantes iguais a zero. Como o gráfico de p intercepta o eixo x em dois pontos, a função possui dois zeros reais diferentes e discriminante maior que zero.

- Qual a diferença das funções g e h? E dos gráficos destas duas funções?

R: O sinal do coeficiente a das funções é diferente, na função g, $a < 0$ e na função h, $a > 0$. O gráfico de g é uma parábola virada para baixo e o gráfico de h é uma parábola virada para cima.

Após a discussão, vai ser apresentado aos alunos sobre a concavidade da parábola.

- Para $\Delta > \mathbf{0}$, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos;
- Para $\Delta = \mathbf{0}$, a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto;
- Para $\Delta < \mathbf{0}$, a parábola não intercepta o eixo x .

- Para $a > 0$, a parábola possui concavidade para cima;
- Para $a < 0$, a parábola possui concavidade para baixo.

Será questionado aos alunos:

- Vocês viram que a partir do coeficiente a, conseguimos descobrir a concavidade de qualquer função quadrática? E quanto ao termo independente, o que ele informa?

R: Sim, o termo independente é o valor em que o gráfico da função intercepta o eixo y.

Solicitaremos aos alunos valores para os coeficientes a, b e c para construir o gráfico da função quadrática no Geogebra, após isso utilizaremos o controle deslizante para cada coeficiente, a fim de evidenciar o papel desses coeficientes no gráfico das funções quadráticas.

-Ponto máximo e mínimo de uma função quadrática

Vimos anteriormente que toda parábola possui um ponto chamado de vértice $V = (x_v, y_v)$. Agora, vamos observar o vértice de uma parábola quando possui concavidade voltada para cima e quando possui concavidade voltada para baixo.

- Parábola com concavidade voltada para baixo.

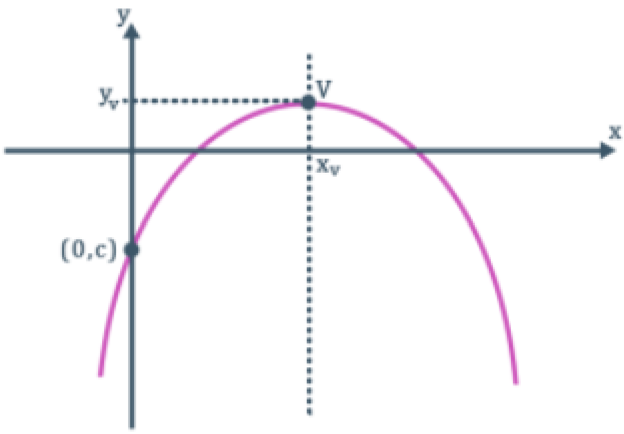

Figura 16: Parábola com concavidade voltada para baixo.

Fonte: https://blog.professorferretto.com.br/vertice-da-parabola-valor-maximo-ou-minimo-da-funcao-quadratica/.

Quando a concavidade de uma parábola é voltada para baixo, ou seja, $a < 0$, o ponto $V = (x_v, y_v)$ é chamado de **ponto de máximo**. Isso é devido ao fato que a coordenada y_v assume o valor máximo da função.

- Parábola com concavidade voltada para cima.

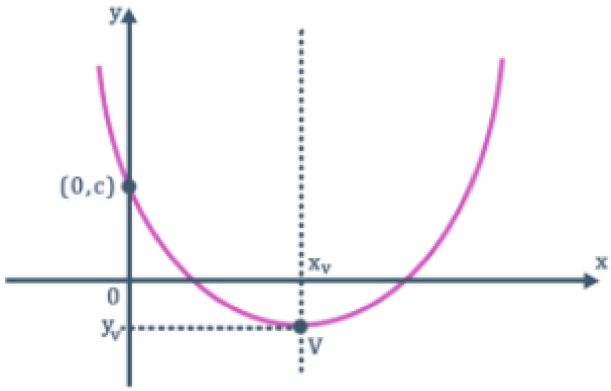

Figura 17: Parábola com concavidade voltada para cima.
Fonte: https://blog.professorferretto.com.br/vertice-da-parabola-valor-maximo-ou-minimo-da-funcao-quadratica/.

Quando queremos saber as coordenadas do vértice, podemos calcular x_v e y_v da seguinte forma:

Quando a parábola possui concavidade voltada para cima, ou seja, $a > 0$, o vértice $V = (x_v, y_v)$ é chamado de **ponto de mínimo**, pois y_v assume o valor mínimo da função.

$$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}}$$
$$\boldsymbol{y_v = -\frac{\Delta}{4a}} \textbf{ ou } \boldsymbol{y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c}$$

Exercício

2. Após várias experiências em laboratório, observou-se que a concentração de certo antibiótico, no sangue de cobaias, varia de acordo com a função $y = 12x - 2x^2$, em que x é o tempo decorrido, em horas, após a ingestão do antibiótico. Nessas condições, determine

o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias.

Resolução:

Observemos que $a = -2 < 0$, então a concavidade é voltada para baixo, assim a parábola possui um ponto de máximo.

Vamos encontrar as coordenadas desse ponto,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3$$

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = -2(3) + 12(3) = 30$$

Assim, $x_v = 3$ é o tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias.

-Função crescente e decrescente

- O que é uma função crescente? E uma função decrescente?

R: Na crescente se os valores de x aumentam os de y também aumentam e se os valores de x diminuem os valores de y diminuem também. Já na decrescente se os valores de x aumentam os de y diminuem e se os valores de x diminuem os de y aumentam.

- Analisando os gráficos a seguir, qual a diferença da lei de formação das funções, e qual a diferença dos gráficos dessas funções?

R: O primeiro gráfico é crescente e o segundo é decrescente.

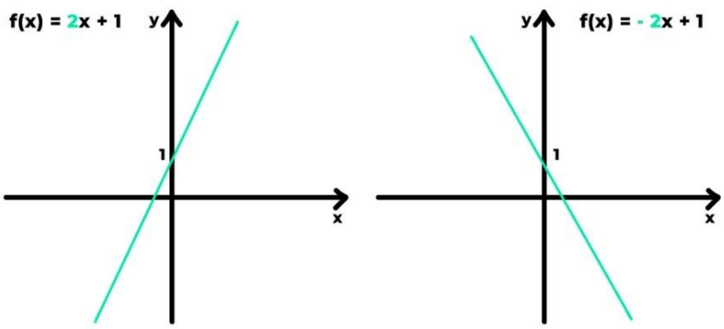

Figura 18: Função crescente e decrescente respectivamente.
Fonte: Próprio autor.

Após esses questionamentos, será evidenciado aos alunos que podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função qualquer por meio da análise de sua representação gráfica, ou seja, analisar o **crescimento** e **decrescimento** da função.

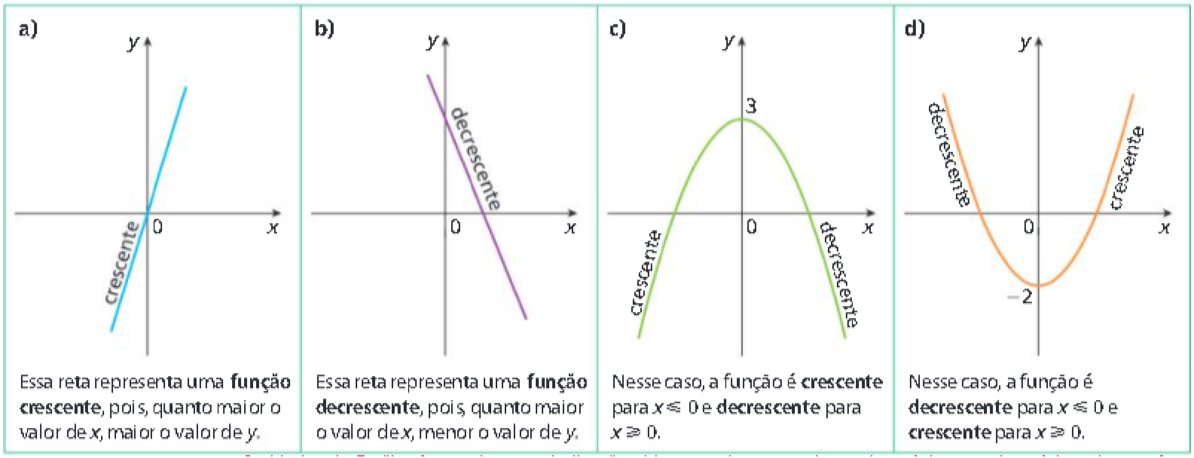

Figura 19: Crescimento e decrescimento de função afim e quadrática.
Fonte: Livro Conexões com a matemática, 3° edição.

Outra forma de saber se uma função afim $f(x) = ax + b$ é crescente ou decrescente, é analisando o valor do coeficiente a, o que pode ser notado pela imagem dada para os alunos analisarem durante o último questionamento, em que o valor do coeficiente a está em destaque na cor azul.

- $a > 0 \Rightarrow$ a função é crescente.
- $a < 0 \Rightarrow$ a função é decrescente.

Em seguida, definiremos crescimento e decrescimento de funções.

Uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
Uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Então será solicitado aos discentes que tentem resolver o exercício a seguir, o qual terá como objetivo fixar o conteúdo já visto sobre funções, além de ajudar na introdução da ideia de sinal de funções.

3. No plano cartesiano a seguir, estão esboçados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

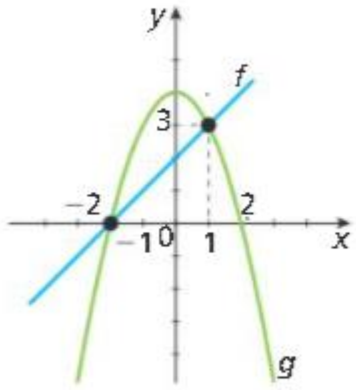

Figura 20: Gráfico de uma função afim intersectando uma função quadrática.
Fonte: Livro Conexões com a matemática, 3° edição.

a) A função f é crescente ou decrescente?

b) Em que intervalo a função g é crescente? E decrescente?

c) Para quais valores temos $f(x) = g(x)$?

d) Em quais intervalos a função g é positiva? E negativa?

e) Em qual intervalo a função f é positiva? E negativa?

Resolução:

a) Como $f(-2) = 0$ e $f(1) = 3$, podemos perceber que aumentando o valor de x de -2 para 1, aumenta consequentemente o valor de y, sendo respectivamente 0 e 3, por se tratar de uma função afim, ou seja, a representação gráfica é uma reta, concluímos que f é crescente em todo o seu domínio.

b) g é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

c) Analisando o gráfico percebemos que f e g se interceptam em dois pontos, $(-2,0)$ e $(1,3)$, logo para $x = -2$ e $x = 1$ temos que $f(x) = g(x)$.

d) A função g é positiva no intervalo $]-2,2[$ e negativa em $]-\infty, -2[$ e $]2, +\infty[$.

e) A função f é positiva no intervalo $]-1, +\infty[$ e negativa em $]-\infty, -1[$.

Então será exposto graficamente a ideia de sinal de uma função.

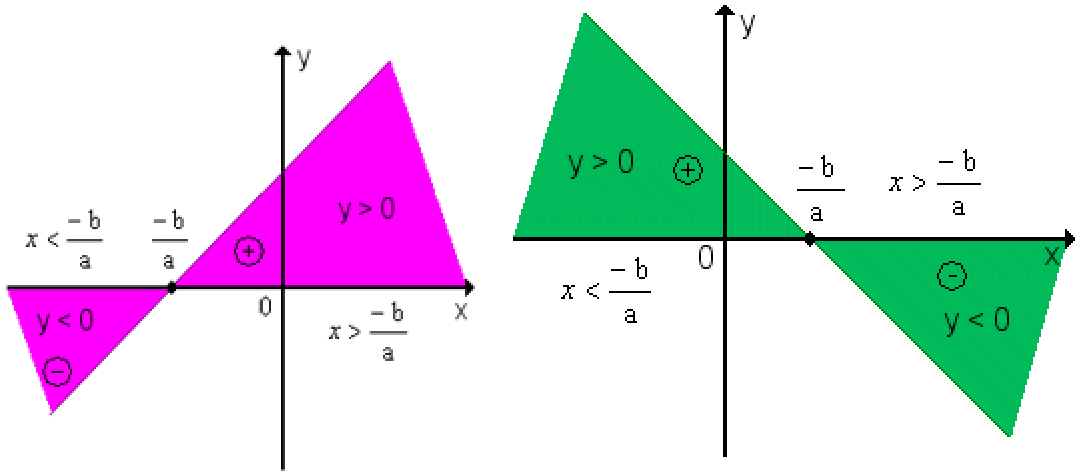

Figura 21: Sinal de função afim.
Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1_3.php. Acesso em: 18 de mar. De 2021.

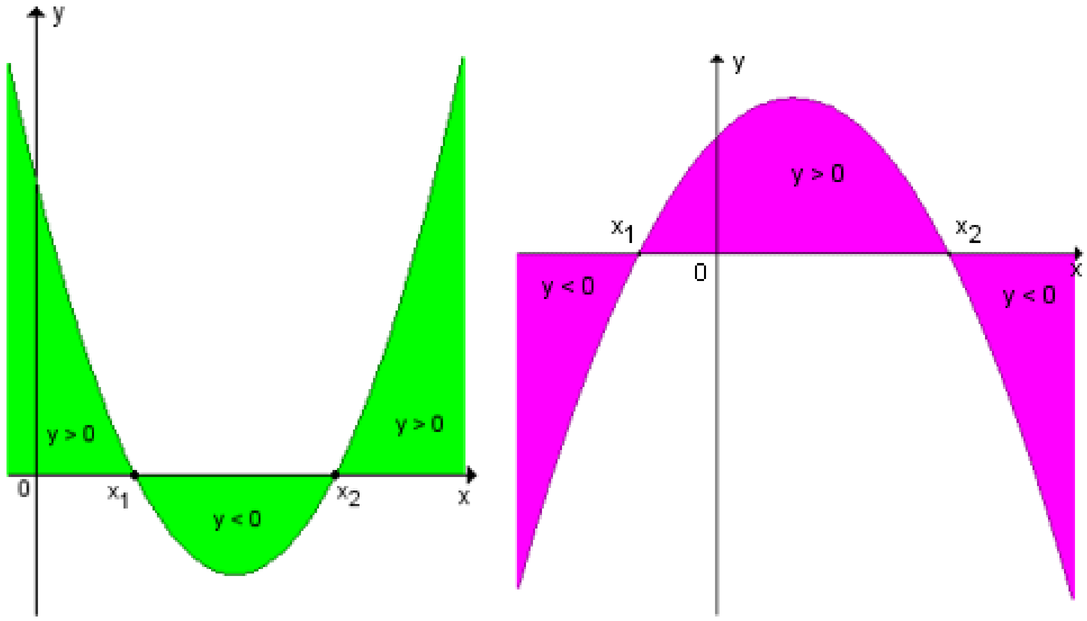

Figura 22: Sinal de função quadrática.
Fonte: https://www.somatematica.com.br/emedio/funcao2/funcao2_4.php.

Então voltaremos brevemente a atividade 2 para analisar os gráficos das funções f, g, h e p, com o intuito de analisar o sinal do domínio de cada função.

Chegando assim que:

- f é positiva em todo o seu domínio;
- g é negativa em todo o seu domínio menos no ponto $(0; 0)$ no qual se anula;
- h é positiva em todo o seu domínio menos no ponto $(0; 0)$ no qual se anula;
- p é positiva no intervalo $(-\infty, 0.82) \cup (0.82, +\infty)$, negativa em $(-0.82,0.82)$ e se anula nos pontos $(-0.82,0)$ e $(0.82.0)$.

Definiremos em seguida, sinal de uma função.

Feito isso, será realizado o seguinte questionamento, com o intuito de definir função constante:

- Existe a possibilidade de uma função ser nem crescente nem decrescente?

R: Sim, se ela for paralela ao eixo das abcissas, conforme o valor de x aumenta o valor de y continuará sempre o mesmo ao invés de aumentar, logo não é crescente, mas y também

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

1. f é positiva para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
2. f é negativa para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
3. f se anula para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$;

não irá diminuir o valor quando se aumenta o valor de x, logo também não poderá ser decrescente.

Durante esse questionamento, com o auxílio do Geogebra, solicitaremos aos estudantes que nos forneçam números reais para a construção do gráfico das funções constantes definidas por esses números.

Então, realizada tal discussão, conversa e explicação sobre funções constantes, será colocada a seguinte definição:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **constante** se, e somente se, para $k \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = k$.

Avaliação:

A avaliação será dada mediante observação da participação dos alunos na aula, bem como comentários orais e por meio do chat e realização das atividades propostas pelos professores. Neste momento será analisado se os alunos são capazes de resolver e interpretar problemas que envolvam gráfico de função, identificar gráfico de função afim e quadrática e diferenciar funções.

Referências

FERRETO. **Professor Ferreto:** Coeficiente angular da função afim. Disponível em: <https://blog.professorferretto.com.br/o-coeficiente-angular-de-uma-funcao-afim/>. Acesso em: 28 fev. 2021.

FERRETO. **Professor Ferreto:** Como encontrar as coordenadas do vértice da parábola. Disponível em: < https://blog.professorferretto.com.br/vertice-da-parabola-valor-maximo-ou-minimo-da-funcao-quadratica/ >. Acesso em 19 mar. 21.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator>. Acesso em: 19 mar. 2021.

FERRETO. **Professor Ferreto:** Intervalos reais. Disponível em: <https://blog.professorferretto.com.br/intervalos-reais/>. Acesso em 18 março.21

LEONARDO, F. **Conexões com a matemática, 1º ano**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LEONARDO, F. **Conexões com a matemática, 1º ano**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. Disponível em: <https://docero.com.br/doc/nc50esn>. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

MENTIMETER. Disponível em: https://www.mentimeter.com/. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

PAIVA. M. **Matemática, volume único**. 1. ed. São Paulo, 2005.

UNICAM. **Educacional Plenus:** Resolução Unicamp 2016 (1ª fase) matemática. Disponível em: <https://educacionalplenus.com.br/resolucao-unicamp-2016-1a-fase-matematica/ > . Acesso em: Acesso em: 17 de mar. de 2021.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

4.3.2 Relatório da aula 3

No dia 20 de março nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jtisi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:45 abrimos a sala e logo alguns alunos começaram a entrar. Iniciamos no horário marcado com a presença de 17 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, embora no encontro anterior foram 18 os alunos que entraram no link da aula.

Iniciamos a aula propondo que os alunos respondessem um quiz na plataforma Mentimeter, com seis perguntas de verdadeiro e falso e uma de múltipla escolha. As perguntas estavam relacionadas aos conteúdos de crescimento, decrescimento e gráfico de função afim e função quadrática. A seguir está a relação de erros e acertos das perguntas do *quiz*.

Figura 23: Relação de erros e acertos das perguntas do Mentimeter.
Fonte: Próprio autor.

Figura 24: Relação de erros e acertos das perguntas do Mentimeter.
Fonte: Próprio autor.

Figura 25: Relação de erros e acertos das perguntas do Mentimeter.
Fonte: Próprio autor.

Figura 26: Relação de erros e acertos das perguntas do Mentimeter.
Fonte: Próprio autor.

As perguntas do quiz foram comentadas conforme apresentávamos os conteúdos a que elas se referiam e o tempo estipulado de um minuto para cada pergunta foi suficiente para que todos os alunos respondessem. A pergunta de múltipla escolha que ilustrava o gráfico do lucro líquido de três empresas A, B e C e questionava qual delas possuía o maior crescimento foi resolvida no início da aula para introduzir o conteúdo.

Esperávamos perguntar aos alunos qual das alternativas $y = -100x + 201800$, $y = 100x - 201000$ e $y = 200x - 402500$ representava a lei de formação da função que descrevia o lucro da empresa C, porém percebemos que este questionamento não estava nos slides da aula, por esse motivo, decidimos apenas comentar sobre a lei de formação da função.

Foi questionado aos alunos se conheciam o termo “coeficiente angular”. Alguns alunos responderam que sim, mas não lembravam o que significava. Em seguida foi definido o papel do coeficiente angular e do coeficiente linear no gráfico de uma função afim. Isto foi evidenciado utilizando o GeoGebra, inicialmente alterando o valor do coeficiente angular e depois alterando o valor do coeficiente linear, com valores sugeridos pelos alunos. Um dos alunos comentou que o uso do aplicativo do GeoGebra tornava as aulas mais dinâmicas e o conteúdo se tornava mais fácil de compreender.

No exercício 1, questionamos se era possível dizer qual o consumo de energia elétrica para três horas de funcionamento de certo equipamento apenas interpretando o gráfico dessa situação, as respostas dos alunos foram que sim.

Ao introduzir a definição de gráfico de função quadrática, surgiram problemas técnicos, neste momento houve necessidade de outro professor assumir a explicação.

Para trabalhar concavidade de parábola foi utilizado o GeoGebra para construir os gráficos de quatro funções. Com os gráficos foi revisado o conceito de zero da função quadrática e pedíamos que os alunos calculassem o discriminante de cada função dada para analisarmos os zeros das funções.

Ao explicar o conteúdo de sinal de função, um dos alunos perguntou se o sinal da função não dependia de y. Dessa forma percebemos que a explicação do conteúdo não estava ficando clara, então tentamos explicar que para determinar o sinal da função nos atentamos para os valores de x e para o sinal dos valores de y associados.

Devido à falta de tempo o exercício 2 ficou para os alunos resolverem em casa, sendo que sua resolução foi disponibilizada de forma assíncrona.

4.4 Módulo/encontro 4 -

4.4.1 Plano de aula

Conteúdo:

Domínio, contradomínio, imagem de função, função injetora, sobrejetora e bijetora.

Público-Alvo:

Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos e restrições dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma função. E a relação de correspondência biunívoca.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Revisar conhecimentos prévios por meio de conjuntos e esquemas;
- Perceber o conteúdo de funções em vestibulares;
- Identificar o domínio contradomínio e imagem de uma função.
- Identificar funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras a partir de sua representação gráfica.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos Didáticos:

Kahoot, Mentimeter, arquivos de textos, slides, GeoGebra.

Encaminhamento metodológico:

-Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Será ilustrada uma animação pelo link https://www.geogebra.org/m/uznszsha que possui disponível no site GeoGebra que retrata a seguinte situação:

- Quando você utiliza um táxi, o valor cobrado no final do trajeto é a soma do valor da "bandeirada" com o valor referente ao número de quilômetros rodados. A "bandeirada" é um valor fixo cobrado pelos taxistas que independe de quantos quilômetros você vai rodar. Você pode observar que, ao entrar em um táxi, já está fixado esse valor no taxímetro. Você também pode observar que, para cada quilômetro rodado, há um valor fixo. Isto é, a variação do preço é proporcional à distância percorrida. Suponha que o valor da bandeirada seja de R$5,00 e que o valor de cada quilômetro rodado seja R$1,20. Então, a função que relaciona o número de quilômetros rodados com o valor total a ser pago é uma função afim dada pelo gráfico a seguir:

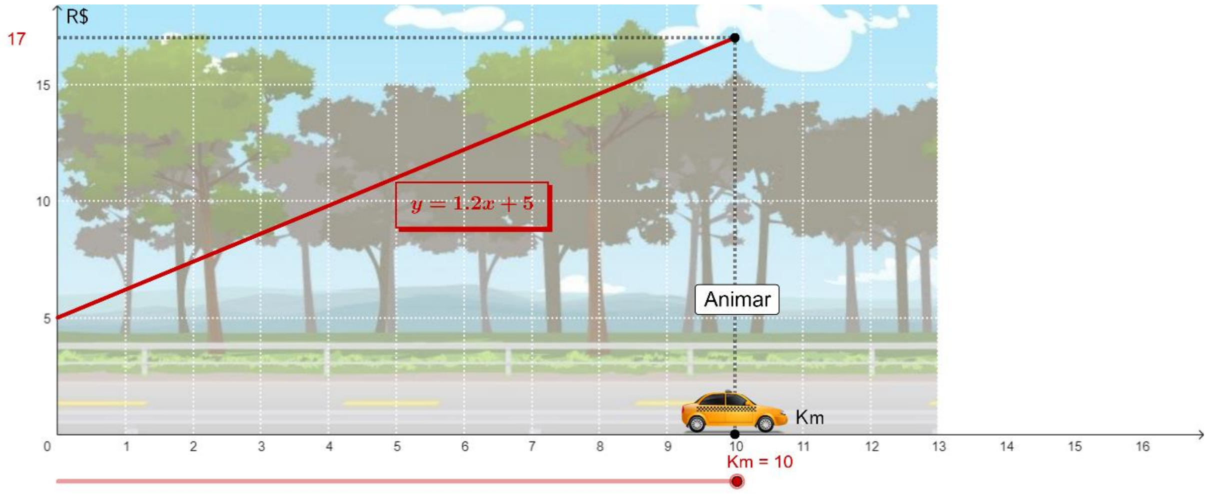

Figura 27: Gráfico do valor da corrida em função dos quilômetros rodados.
Fonte: Próprio autor.

Serão feitos os seguintes questionamentos:

- Seria possível, nessa situação, o táxi iniciar seu trajeto no quilômetro -1?

R: Não seria possível, pois não existe uma distância negativa.

- A partir de que valor de x que representa os quilômetros é possível calcular o valor de uma viagem?

R: A partir do valor zero.

- Sabendo que existem os conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, reais., qual conjunto numérico o valor da viagem se encaixa? E o valor da quilometragem?

R: Ambos no conjunto dos números reais.

- Sabendo que y é o valor a ser pago pela viagem, essa variável pode assumir qualquer valor?

R: Não, pois não pode assumir valores negativos.

Com o intuito de introduzir os conceitos de domínio, contradomínio e imagem, será disponibilizado um quiz na plataforma Mentimeter para que os alunos respondam as perguntas do exemplo a seguir. Conforme os alunos irão respondendo a professora Fabiana irá comentar e corrigir as respostas obtidas.

Exemplo

Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. A função que representa o custo total por x peças é $f(x) = 0{,}50x + 8{,}00$.

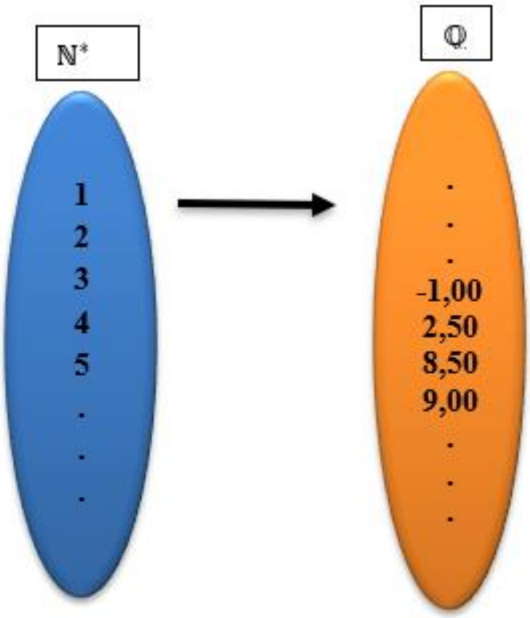

Figura 28: Conjuntos infinitos de números.
Fonte: Próprio autor.

- Todos os valores representados no conjunto $\mathbb{Q}$ por meio do diagrama são valores possíveis para o custo total de peças dessa empresa? Por quê?

R: Não, pois o valor -1 e o valor 2,5 resultam em um x negativo e não tem como haver número de peças negativas, pois o número de peças está representado pelo conjunto dos números naturais.

- Há algum valor no conjunto $\mathbb{Q}$ representado no diagrama que é possível ser o custo total de peças?

R: Sim, existem dois valores o 8,50 e o 9,00, pois

$$8{,}50 = 0{,}50x + 8{,}00$$
$$\Rightarrow 0{,}50 = 0{,}50x$$
$$\Rightarrow x = 1$$

e

$$9{,}00 = 0{,}50x + 8{,}00$$
$$\Rightarrow 1{,}00 = 0{,}50x$$
$$\Rightarrow x = 2$$

- Todos os elementos do conjunto $\mathbb{N}^*$ dado no diagrama podem representar a quantidade de peças?

R: Sim, pois não há restrição de número máximo de peças e no conjunto não está incluso o valor zero.

- Por que todos os elementos do conjunto $\mathbb{N}^*$ podem representar o número de peças e alguns elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ não representam os valores a serem pagos pelas peças?

R: Porque o valor a ser pago depende do número de peças que são números inteiros positivos/naturais, logo, os valores de $\mathbb{Q}$ estão restritos apenas aos que resultam da aplicação da função que representa o preço a ser pago em função das peças.

- Vocês já ouviram falar de domínio, contradomínio e imagem?

Após o quiz, o professor irá introduzir o conceito de domínio, contradomínio e imagem.

Domínio: É o conjunto formado pelos valores que x pode assumir. É comum ser representado pela letra D.

Contradomínio: É o conjunto de chegada de uma função, contém todas as imagens possíveis para a função.

Imagem: O conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio, formado pelos elementos y correspondentes a algum valor do domínio. É comum ser representado por Im.

<u>Exemplo:</u> No caso da situação dada, o domínio é o conjunto dos números naturais excluindo o número zero $\mathbb{N}^*$, o contradomínio é o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e a imagem é o conjunto dos números que resultam da aplicação da função, ou seja, $\{8{,}50; 9{,}00; 9{,}50; \ldots\}$.

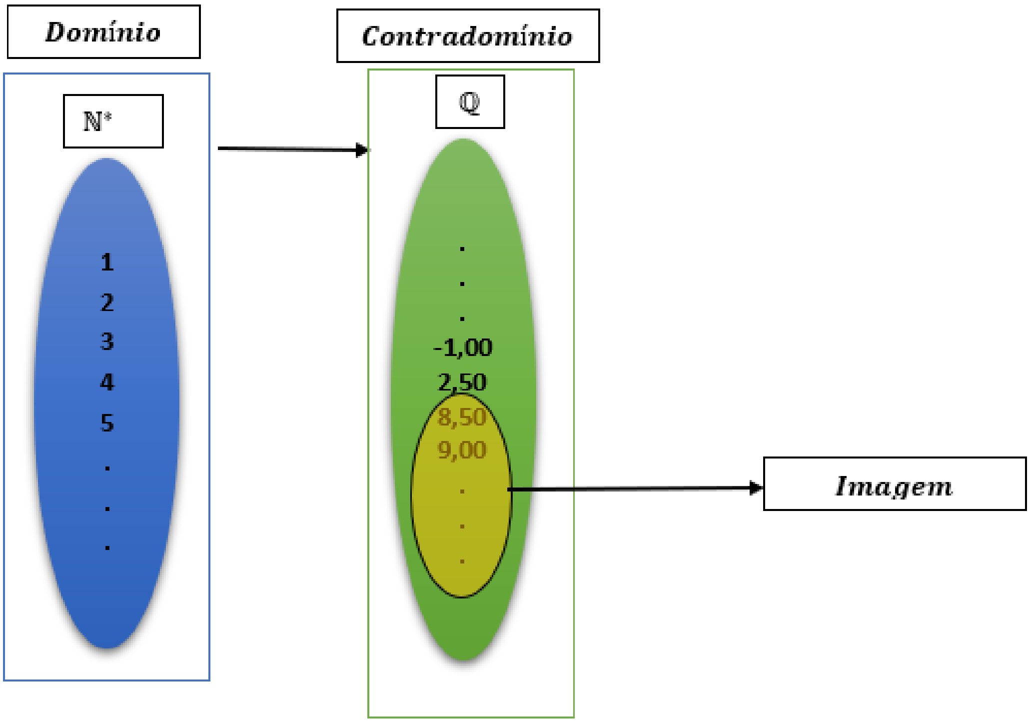

Figura 29: Conjuntos de domínio, contradomínio e Imagem.
Fonte: Próprio autor.

Exercício

1. Dada a função $f(x) = 2x$, com domínio igual ao conjunto dos números naturais, assinale a alternativa correta relativa a seu domínio, contradomínio e imagem.

a) O domínio dessa função é o conjunto dos números inteiros.

b) Não é possível usar essa função para qualquer fim, pois o seu contradomínio não está bem definido.

c) A imagem dessa função é igual ao conjunto dos números pares não negativos.

d) O contradomínio dessa função não pode ser o conjunto dos números naturais.

e) A imagem dessa função é igual ao seu domínio.

Resolução:

a) Está incorreta pois no enunciado fala que o domínio da função é o conjunto dos números naturais, e o conjunto dos números naturais não possui números negativos, já nos inteiros sim. Logo, o domínio de $f(x) = 2x$ não possui todos os inteiros.

b) Está errada pois, o contradomínio não estar definido não implica que a função não seja usada para qualquer finalidade.

c) Está correta pois, como o domínio da função é o conjunto dos números naturais $D = \{0,1,2,3,4,5,6, \ldots\}$ e como a lei de formação da função é $f(x) = 2x$, os valores do conjunto imagem sempre serão números pares e não negativos, $Im = \{0,2,4,6,8,10,12, \ldots\}$.

Quadro 9 : Elementos do domínio e imagem.

Elementos do domínio	$f(x) = 2x$	Elementos da imagem
0	$f(0) = 2.0 = 0$	0
1	$f(1) = 2.1 = 2$	2
2	$f(2) = 2.2 = 4$	4
3	$f(3) = 2.3 = 6$	6
4	$f(4) = 2.4 = 8$	8
5	$f(5) = 2.5 = 10$	10
6	$f(6) = 2.6 = 12$	12

Fonte: Próprio autor.

d) Está errada pois os números pares e não negativos que formam o contradomínio dessa função pertencem ao conjunto dos naturais.

e) Também está errada, pois já vimos que o domínio da função é o conjunto dos números naturais e o conjunto imagem é o conjunto dos números pares não negativos.

Exercício

2. Defina o domínio das funções reais a seguir:

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $g(x) = \frac{x+2}{x-5}$

c) $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+3}}$

Resolução:

a) Como se trata de uma raiz quadrada então o radicando de uma raiz de índice par não pode ser negativo, logo $x - 2 \geq 0$, assim temos que $x \geq 2$. Ou seja, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2\}$.

b) Nesse caso, o denominador não pode ser nulo, pois não existe divisão por zero, assim $x - 5 \neq 0$, logo $x \neq 5$. Ou seja, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 5\}$.

c) Nesse caso, o denominador $(x\sqrt{x+3})$ não pode ser nulo e o radicando da raiz não pode ser menor que zero, logo vamos descobrir quais valores de x zeram o denominador, assim tais valores encontrados não poderão pertencer ao domínio:

$$x\sqrt{x+3} \neq 0$$

Como temos uma multiplicação de dois termos a qual não queremos que resulte em zero, então

$$x \neq 0$$

E

$$\sqrt{x+3} \neq 0$$

$$x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

Assim $x = 0$ e $x = -3$ não pertencem ao domínio. Logo necessitamos que $x \neq 0$ e $x \neq -3$.

E ainda, precisamos descobrir quais valores de x não deixam o radicando da raiz negativo:

$$x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

Assim temos que $D(h) = x \in \mathbb{R} \,/\, x > -3 \; e \; x \neq 0$.

-Função injetora, sobrejetora e bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que

$$f(x) = y$$

Isto é, $f: A \to B$ é sobrejetora se o conjunto imagem de f é igual o conjunto B.
Por exemplo, a função $f: A \to B$, tal que $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei de formação $f(x) = x^2$, é sobrejetora pois, para todo elemento y pertencente a B, existe um elemento x que pertence a A tal que $y = x^2$.

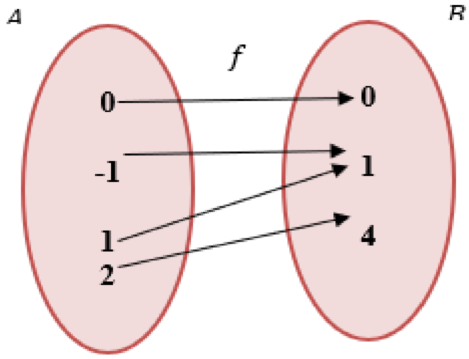

Figura 30: Conjuntos numéricos.
Fonte: Próprio autor.

Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Notemos que pela definição a função $f: A \to B$ tal que $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei de formação $f(x) = x^2$, não é injetora pois, tomemos $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, sabemos que $x_1 \neq x_2$ pois, $-1 \neq 1$ mas, $f(x_1) = f(-1) = (-1)^2 = 1$ e $f(x_2) = f(1) = 1^2 = 1$ logo, $f(x_1) = f(x_2) = 1$, o que contraria a definição de ser injetora.

Já a função $f: A \to B$, tal que $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei $f(x) = 2x + 1$ é injetora pois, dois elementos distintos de A têm como imagens dois elementos distintos de B.

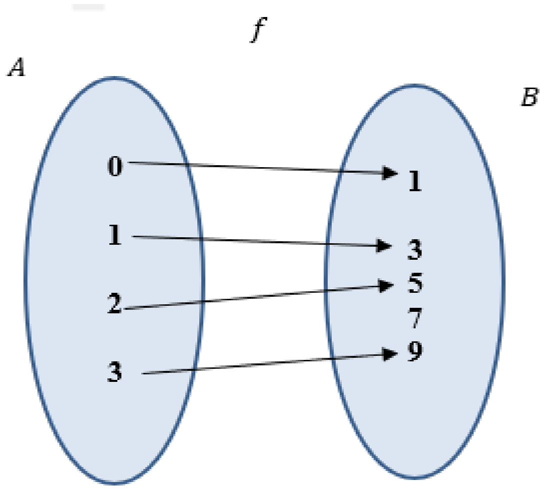

Figura 31: Conjuntos numéricos.
Fonte: Próprio autor.

Exercício

3. Determine o maior valor de k em $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq k\}$ de modo que a função $f: A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

Resolução:

Para ser injetora dois elementos diferentes do domínio devem estar associados a duas imagens diferentes.

Observemos que o gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ é uma parábola que é simétrica em relação ao eixo de simetria que passa pelo vértice assim, para valores de x maiores que o x do vértice os valores de y começam a se repetir.

-Construir o gráfico da função no Geogebra.

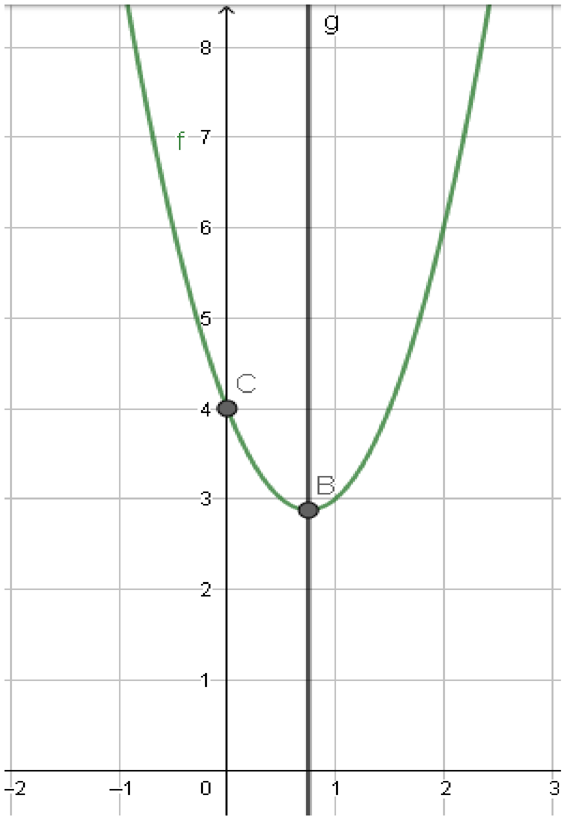

Figura 32: Gráfico de função quadrática.
Fonte: Próprio autor.

Logo, o maior valor de $\boldsymbol{k}$ para que a função seja injetora é o valor do x do vértice.

$$\boldsymbol{k} = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2.2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.

Isto é, f é bijetora se para qualquer elemento $y \in B$ existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

A função $f: A \to B$, tal que $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida pela lei $f(x) = x + 1$ é bijetora pois, f é injetora e sobrejetora, ou seja, para todo $y \in B$, existe um único elemento $x \in B$, tal que $y = x + 1$.

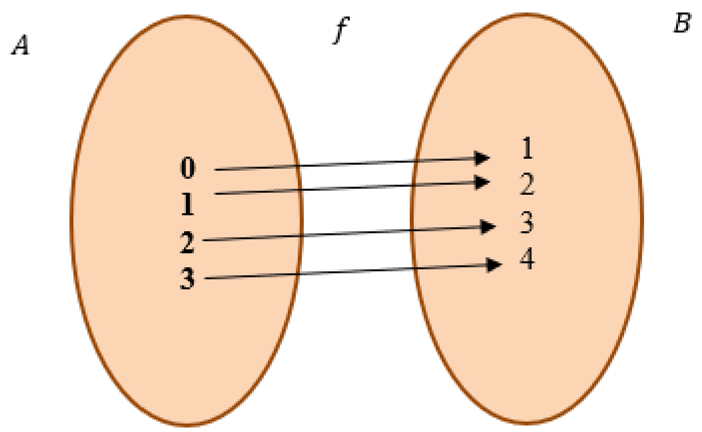

Figura 33: Diagrama de uma função bijetora.
Fonte: Próprio autor.

Assim, $\boldsymbol{k} = \frac{3}{4}$ e $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{3}{4}\}$ então, $f: A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ é injetora.

Podemos verificar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora através de sua representação gráfica.

1. Se cada uma das retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico então a função é injetora.

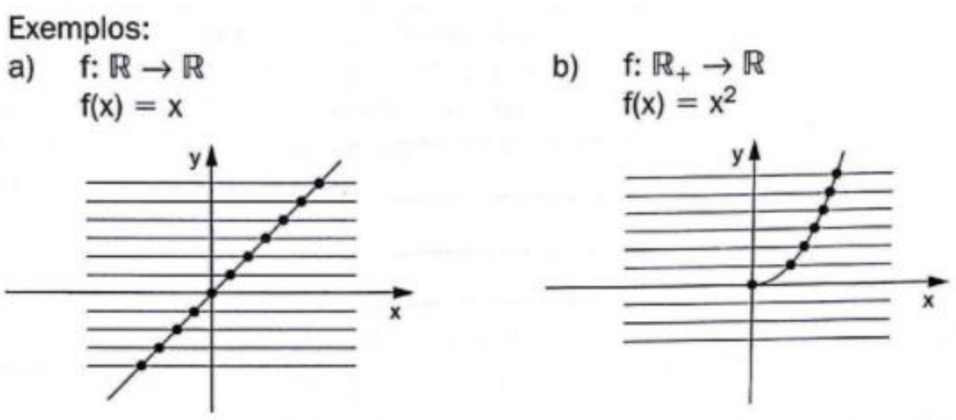

Figura 34: Exemplos de gráficos de funções injetoras.

Fonte: IEZZI, G.; MURAKAMI, 2013.

- Questionar aos alunos o porquê do exemplo b. não ser uma função sobrejetora.

R: Não é sobrejetora pois nem todo elemento $y \in \mathbb{R}_-$ tem um elemento $x \in \mathbb{R}_+$ associado.

2. Se cada uma das retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um ou em mais pontos então a função é sobrejetora.

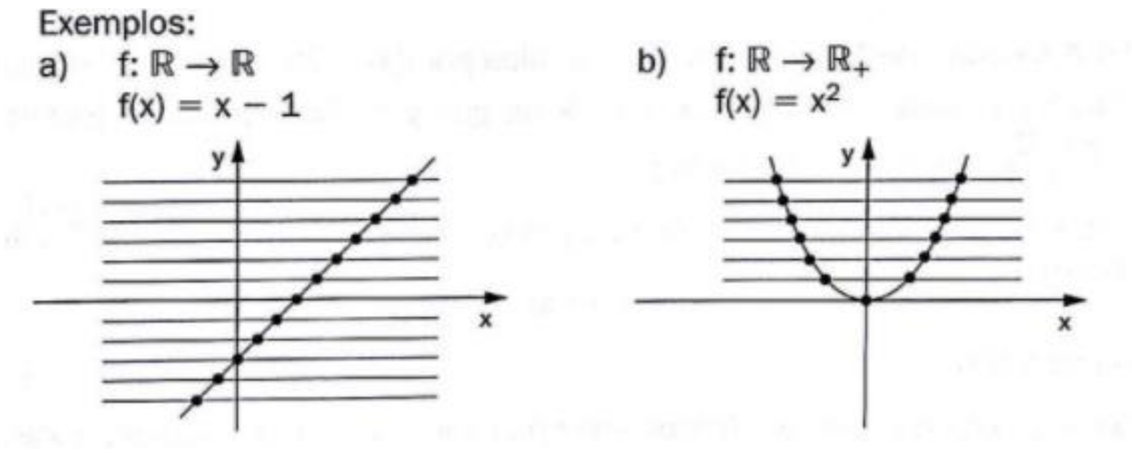

Figura 35:Exemplos de gráficos de funções sobrejetora.
Fonte: IEZZI, G.; MURAKAMI, 2013.

- Questionar aos alunos o porquê do exemplo b. não ser uma função injetora.

R: Pelo fato de que para cada $y \in \mathbb{R}_+$ está associado dois elementos $x \in \mathbb{R}$. Isso contraria a definição de ser injetora.

3. Se cada uma das retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um só ponto, então a função é bijetora.

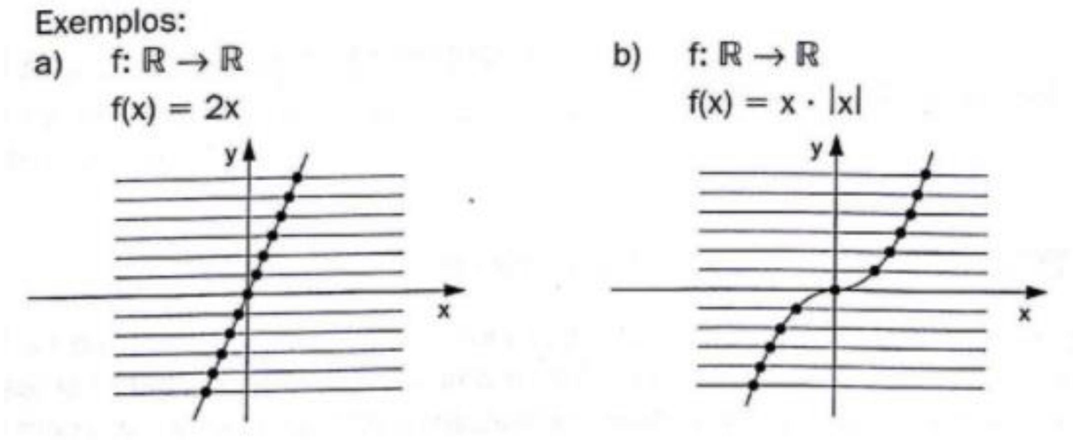

Figura 36: Exemplos de gráficos de funções bijetoras.
Fonte: IEZZI, G.; MURAKAMI, 2013.

4. (UF-MA) As figuras a seguir ilustram os gráficos das funções $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

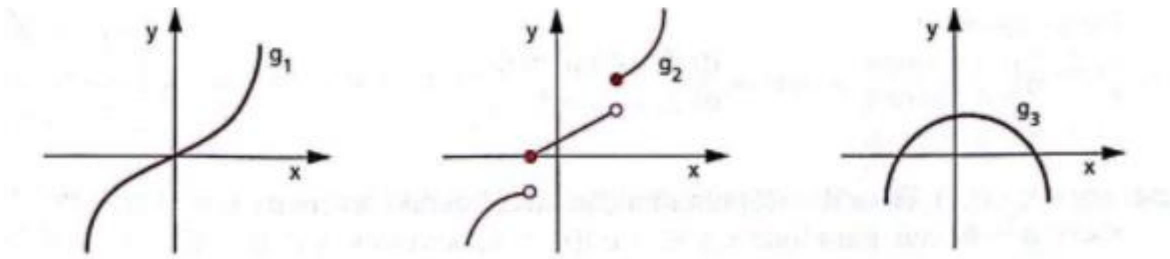

Figura 37: Gráficos de funções.
Fonte: IEZZI, G.; MURAKAMI, 2013.

A partir dos gráficos anteriores, são feitas as seguintes afirmações:

I. g_1 é sobrejetora.

II. g_2 é crescente.

III. g_3 é bijetora.

Então:

a) II e III são falsas e I é verdadeira.

b) Todas são falsas.

c) I e II são verdadeiras e III é falsa.

d) Todas são verdadeiras.

e) I e III são verdadeiras e II é falsa.

Resolução:

Percebemos que g_3 não é uma função bijetora pois, não é injetora.

g_1 é uma função sobrejetora pois analisando o gráfico percebemos que todo $y \in \mathbb{R}$ está associado a um $x \in \mathbb{R}$.

g_2 é crescente pois, $f(x_1 < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

Logo, a alternativa correta é a letra c.

Exercício

5. Utilizando todos os conhecimentos adquiridos durante nossas aulas, descubra a lei de formação dos gráficos das funções a seguir:

a) $g(x) =$

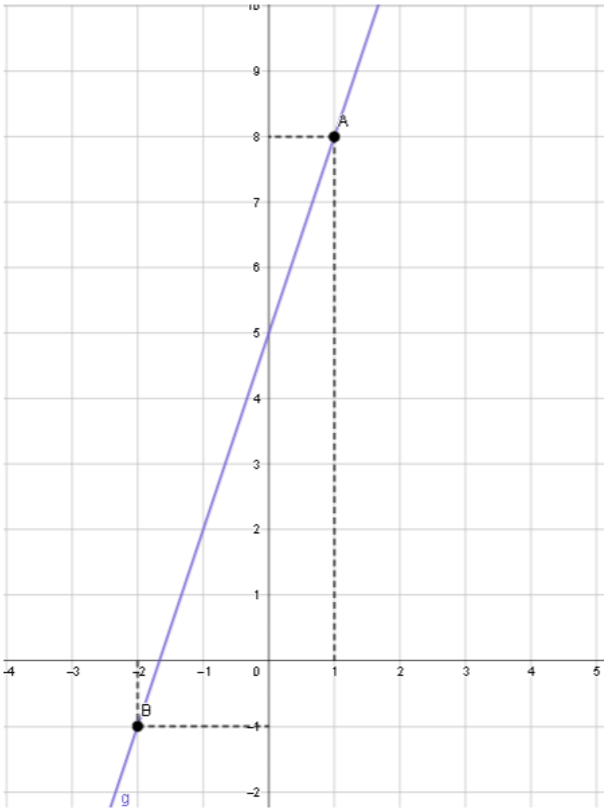

Figura 38: Gráfico de uma função afim.
Fonte: Próprio autor.

Resolução:

Maneira geral:

Percebemos que se trata de uma função afim, assim identificamos no gráfico os pontos $(1, 8)$ e $(-2, -1)$ e substituímos na lei de formação geral de uma função afim:

$$g(x) = a.x + b$$

Para $(1, 8)$ obtemos:

$$g(1) = 8 = a.1 + b$$

Isolando a chegamos em:

$$a = 8 - b$$

Agora para $(-2, -1)$ obtemos:

$$g(-2) = -1 = a.(-2) + b$$

Simplificando a equação

$$(-2).a + b = -1$$

Substituindo a por $8 - b$:

$$(-2).(8 - b) + b = -1$$

$$-16 + 2b + b = -1$$

$$3.b = 15$$

$$b = 5$$

Levando $b = 5$ em $a = 8 - b$ temos

$$a = 8 - 5 = 3$$

Voltando a lei de formação chegamos em

$$g(x) = 3.x + 5$$

OBS: poderíamos pensar que o gráfico de uma função afim sempre intercepta o eixo y no valor do termo independente, assim já conseguimos descobrir que $b = 5$, levando na lei de formação geral:

$$g(x) = a.x + 5$$

Agora basta aplicarmos algum ponto nessa lei de formação, assim usando o ponto $(1, 8)$ chegamos em

$$g(1) = 8 = a.1 + 5$$

$$a = 8 - 5$$

$$a = 3$$

Assim,

$$g(x) = 3.x + 5$$

b) $f(x) = -\left(\frac{9}{4}\right)x^2 + 9$

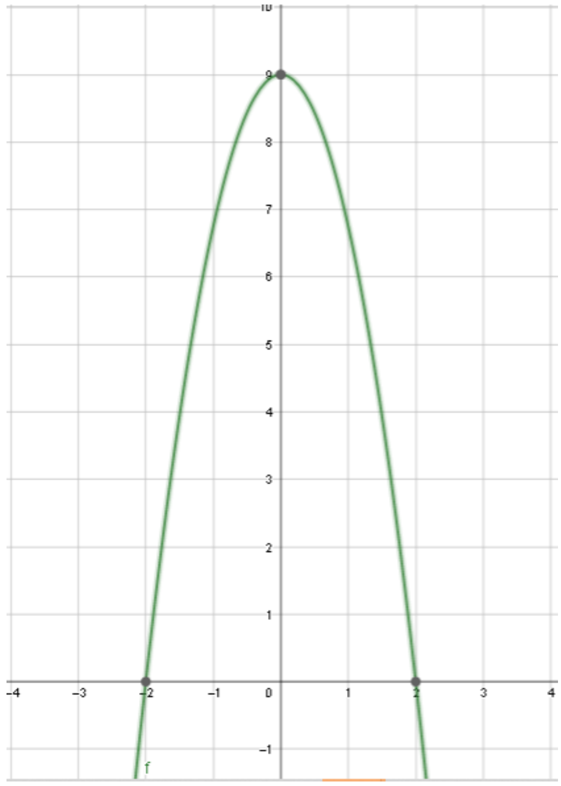

Figura 39: Gráfico de uma função quadrática.
Fonte: Próprio autor.

Resolução:

Escrevendo a lei de formação de f na forma geral de uma função quadrática temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como a parábola corta o eixo y no ponto $(0, 9)$, logo nosso termo independente é 9, assim:

$$f(x) = ax^2 + bx + 9$$

Analisando que o eixo de simetria da parábola é o eixo y então temos que $b = 0$, assim:

$$f(x) = ax^2 + 9$$

Agora aplicando o ponto $(2, 0)$ na lei de formação acima para descobrir o valor de a, temos:

$$f(2) = 0 = a(2)^2 + 9$$

$$0 = 4a + 9$$

$$a = -\frac{9}{4}$$

Assim,

$$f(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 9$$

Outra maneira de resolver, seria que sempre é possível determinar a lei de formação de uma função quadrática caso conhecermos as raízes dela pela seguinte fórmula:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Do gráfico temos que -2 e 2 são raízes de f, logo

$$f(x) = a\big(x - (-2)\big)(x - 2)$$

$$f(x) = a(x^2 - 4)$$

Usando o ponto $(0, 9)$ temos que

$$f(0) = 9 = a(0^2 - 4)$$

$$9 = -4a$$

$$a = -\frac{9}{4}$$

Assim chegamos em:

$$f(x) = -\frac{9}{4}(x^2 - 4)$$

$$f(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 9$$

Para reforçar o conteúdo visto em aula vamos disponibilizar um quiz na plataforma kahoot. Disponível em: https://create.kahoot.it/details/3f879601-5685-4473-a83b-073ac0843fca .

Questões do quiz:

1. Dada $f(x) = 2x - 3$, o domínio $\{2, 3, 4\}$ e o contradomínio composto pelos naturais entre 1 e 10, qual o conjunto imagem?

R: {1, 3, 5}

2. Seja f: $IR * -> IR$, dada por $f(x) = x2 + 1$, qual o valor de $f(0) + f(1)$?

R: 2, pois o zero não pertence ao domínio.

3. Para ser uma função, cada elemento do domínio deve estar ligado a um único elemento da imagem.

R: Verdadeiro.

4. Quanto a funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras é correto afirmar que:

R: Toda função Bijetora é injetora e sobrejetora.

5. Uma função sobrejetora possui imagem igual ao contradomínio.

R: Verdadeiro.

6. Qual alternativa representa está função:

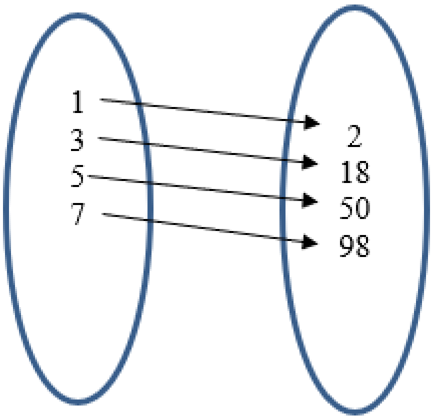

Figura 40: Diagrama de uma função bijetora.
Fonte: Próprio autor.

R: $f(x) = x^2$, bijetora.

Referências:

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator>. Acesso em: 19 mar. 2021.

FERRETTO. **Professor Ferretto:** Introdução de domínio e imagem. Disponível em: < https://blog.professorferretto.com.br/dominio-contradominio-e-imagem/>. Acesso em 25 fev. 2021

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar 1:** Conjuntos funções. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

KAHOOT. Disponível em: <https://kahoot.com/?utm_name=controller_app&utm_source=controller&utm_campaign=controller_app&utm_medium=link>. Acesso em: 25 fev. 202.

MENTIMETER. Disponível em: <https://www.mentimeter.com/>. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

4.4.2 Relatório da aula 4

No dia 27 de março, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jitsi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:40 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado com a presença de 15 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, embora no encontro passado tivesse 18 alunos que acessaram o link da aula.

Para introduzir os conteúdos de domínio, contradomínio e imagem de função, foi utilizado o Geogebra, cuja apresentação mostrava como é cobrado o valor no final de um trajeto ao se utilizar um táxi. Após a explicação foram realizados alguns questionamentos por meio do site Mentimeter, por exemplo, se faria sentido ter valores negativos para os quilômetros rodados ou para o valor a ser cobrado pelo trajeto, em quais conjuntos numéricos estão contidos os valores anteriores e se o preço a ser pago poderia assumir qualquer valor.

Outra questão presente no Mentimeter envolvia conjuntos numéricos e obtivemos poucas respostas. Percebemos também que as imagens disponíveis no questionário do Mentimeter que representavam o domínio, contradomínio e imagem da função $f(x) = 0{,}50x + 8{,}00$ que descreviam a situação do táxi estava ilegível para os alunos, dessa forma, o professor sempre fazia leitura para facilitar a compreensão. Percebemos que mesmo com as imagens pequenas os alunos conseguiram responder as questões.

As respostas do questionário foram discutidas com os alunos e então foi perguntado se já ouviram falar de domínio, contradomínio e imagem. Obtivemos respostas como: “sim”, “não”, “não lembro”, “estou estudando” e “nunca nem vi”. Em seguida foram definidos estes conceitos em slides. Após as definições apresentadas, voltamos a situação do taxi para explicar sobre o seu domínio, contradomínio e imagem, pois esses conteúdos não haviam sido abordados anteriormente. E então foi proposto dois exercícios de fixação, um para identificar qual a alternativa correta em relação ao domínio, contradomínio e imagem da função $f(x) = 2x$, e outro para definir o domínio das funções reais $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-5}$ e $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+3}}$. Nesse exercício os professores foram auxiliando na resolução. Dessa forma, os alunos conseguiram resolver e um deles escreveu no chat todas as respostas que ele obteve, sendo essas respostas corretas.

Após a resolução dos exercícios apresentamos as definições de funções sobrejetora e injetora. Neste momento um aluno perguntou se no contradomínio de uma função injetora sempre sobra elementos, então explicamos que isso nem sempre acontece, pois não há problema de ter elementos no contradomínio que não estejam associados a elementos do domínio de uma função injetora. No entanto, se isso ocorrer, a função não será sobrejetora, visto que o conjunto imagem será diferente do contradomínio. Em seguida, propomos um exercício para determinar o domínio de uma função quadrática para que fosse injetora. posteriormente foi definido função bijetora. Neste momento os alunos não expressaram dúvidas.

Logo após, foram evidenciadas formas de verificar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora por meio de representação gráfica. Neste momento os alunos não demostraram nenhuma dúvida. Foi passado um exercício para ser resolvido juntamente com a turma referente às funções injetora, sobrejetora e bijetora, no qual precisava analisar as afirmativas verdadeiras e falsas sobre três gráficos de funções reais, g_1, g_2 e g_3. Essas afirmativas eram respectivamente:

I. g_1 é sobrejetora.

II. g_2 é crescente.

III. g_3 é bijetora.

E as alternativas eram:

f) II e III são falsas e I é verdadeira.

g) Todas são falsas.

h) I e II são verdadeiras e III é falsa.

i) Todas são verdadeiras.

j) I e III são verdadeiras e II é falsa.

Ao discutir o exercício dois alunos responderam que acreditavam que a alternativa correta era a letra C, e um deles explicou que pensou da seguinte forma: como g_2 era crescente, logo, II é verdadeira, isso implicava que a alternativa a, b e e estavam erradas. Assim, as alternativas que poderiam estar corretas eram a letra c ou d, como ele achava que g_3 não era bijetora pela análise do gráfico, então a resposta correta só poderia ser a letra c. Como o aluno não tinha certeza da resposta e não sabia se g_1 era sobrejetora, explicamos cada uma das afirmativas do exercício retomando a parte teórica para concluir e completar a resposta do aluno, mostrando a partir do gráfico que g_1 era uma função sobrejetora.

Em decorrência da falta de tempo, não foi trabalhado um exercício planejado para a aula, o qual tratava de encontrar as leis de formação de funções através dos seus respectivos gráficos. Por ser um exercício referente ao conteúdo abordado nas aulas anteriores, que tinha como objetivo revisar e finalizar o conteúdo de gráficos de funções, por esse motivo decidimos não o deixar como tarefa de casa.

Para finalizar a aula, foi realizado um quiz no kahoot com perguntas que revisavam os conteúdos de domínio, contradomínio e imagem de função, funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Para cada questão discutimos as respostas corretas e incorretas.

4.5 Módulo/encontro 5 -

4.5.1 Plano de aula

Conteúdo:

Progressão aritmética: definição, classificação, propriedades, termo geral e soma dos n primeiros termos.

Público-Alvo:

Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de progressão aritmética.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer uma progressão aritmética em uma sequência numérica;
- Compreender as propriedades de uma progressão aritmética;
- Perceber como somar uma progressão aritmética finita;
- Resolver problemas variados que envolvem uma PA;

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Microsoft Powerpoint, Kahoot.

Encaminhamento metodológico:

Para introduzir o conteúdo de progressão aritmética vamos solicitar aos alunos que somem todos os números de 1 a 6. Para melhor visualização, os números de 1 a 6 estarão escritos em um slide apresentado pelo Microsoft Powerpoint. Em seguida resolveremos com eles destacando que a ordem da soma não interfere no resultado e que podemos agrupar esses números para realizar essas somas:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$$

$$3 + 3 + 9 + 6 =$$

$$6 + 9 + 6 =$$

$$6 + 6 + 9 =$$

$$12 + 9 = 21.$$

Feito isso vamos pedir para que somem todos os números de 1 a 10. Os números de 1 a 10 também estarão escritos em slide. Em seguida será solicitado aos alunos para que comentem a forma como resolveram a soma.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$$

$$21 + 7 + 8 + 9 + 10 =$$

$$28 + 8 + 9 + 10 =$$

$$36 + 19 = 55.$$

Em seguida será apresentado o problema a seguir e será deixado um tempo para que os alunos pensem e resolvam.

Problema 1: Um professor, para manter seus alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de um a cem. Esperava que eles passassem bastante tempo executando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes um aluno de sete ou oito anos chamado Gauss deu a resposta correta: 5.050. Como ele fez a conta tão rápido?

Para auxiliar os alunos na resolução faremos as seguintes perguntas:

- Como vocês fariam essa soma?
- Qual o resultado da soma do primeiro número com o último da sequência? E do segundo com o penúltimo? E da soma do terceiro número com o antepenúltimo?
- Existe um padrão nessas somas? Se somássemos cada par de número nessa ordem teríamos quantas vezes o resultado 101?

Após os questionamentos resolver o problema junto com os alunos.

Gauss observou que ao somar o primeiro número com o último, 1 + 100, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, 2 + 99, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, 3 + 98, o resultado também era 101. Percebeu que ao somar dessa forma os números de um a cem correspondia o mesmo que somar 50 vezes o número 101. Logo, o resultado seria 50 vezes 101 que resulta em 5050.

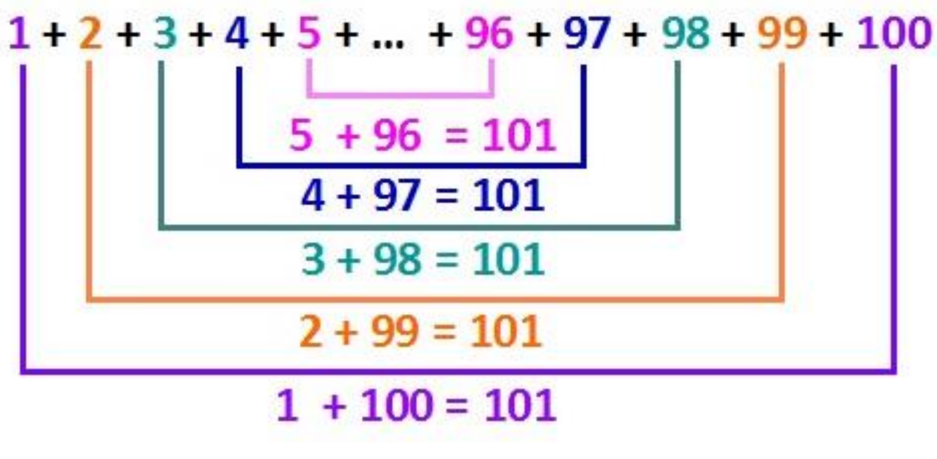

Figura 41:Esquema que representa a soma de 1 a 100.
Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/soma-gauss.htm

Comentar com os alunos que a soma dos números de 1 a 100 como foi trabalhado acima, é um caso particular da soma de uma progressão aritmética. Nesta aula iremos trabalhar este conteúdo.

Então mostraremos como resolver a soma de todos os números de um até seis e de um até dez:

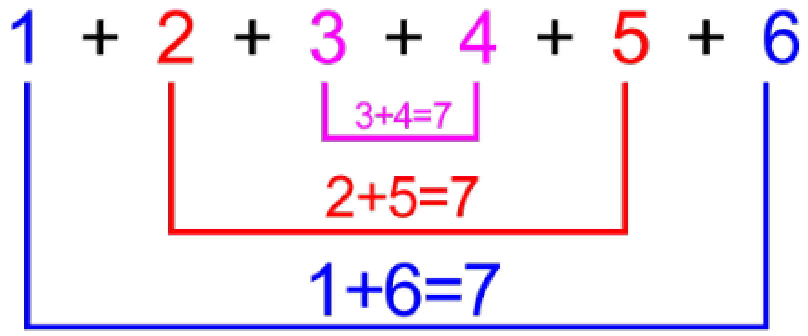

Figura 42:Esquema que representa a soma de 1 a 6.
Fonte: Próprio autor.

Ou seja, é o mesmo que somar três vezes o número sete, logo, $3 \times 7 = 21$.

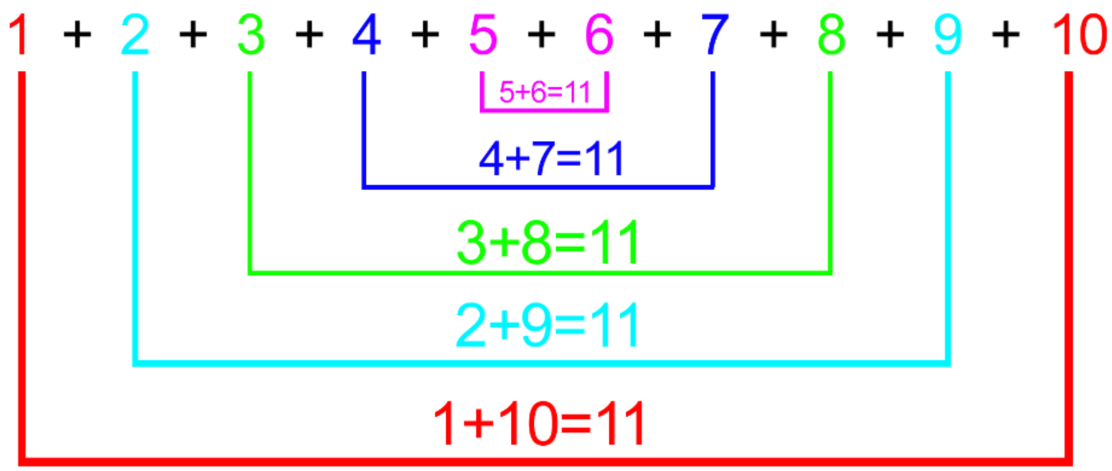

Figura 43: Esquema que representa a soma de 1 a 10.
Fonte: Próprio autor.

Neste caso, precisamos somar cinco vezes a soma onze, ou seja, $5 \times 11 = 55$.

Na sequência, serão realizados os seguintes questionamentos aos alunos:

- Vocês sabem dizer o que é uma sequência?
- Conseguem nos dar exemplos de sequências?

Após o questionamento, será proposto aos alunos que observem a sequência seguinte e respondam alguns questionamentos, que buscam os levar a uma progressão aritmética.

Observe a seguinte sequência:

(4, 7, 10, 13, 16, 19, ...)

- Vocês conseguem perceber alguma relação nessa sequência de números?

  R: Os valores estão aumentando de três em três.

- Seguindo este padrão, quais seriam os próximos valores da sequência?

  R: Os valores seriam (22, 25, 28, 31, ...)

Chama-se **sequência finita** uma sequência que possui um número finito de termos. A sequência finita é definida como toda aplicação f do conjunto $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em $\mathbb{R}$. Assim, em toda sequência finita, a cada número natural i está associado um número real $a_i \in \mathbb{R}$.

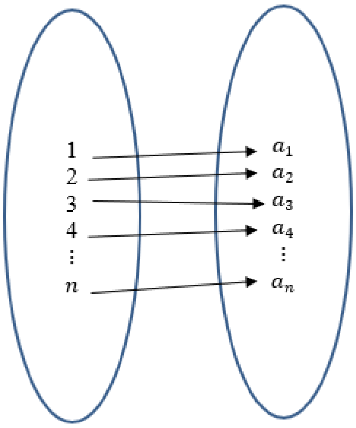

Figura 44: Diagrama ilustrativo de uma sequência finita.
Fonte: Próprio autor.

Chama-se **sequência infinita** toda aplicação f do conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ em $\mathbb{R}$. Assim, em toda sequência infinita, a cada número natural i está associado um número real $a_i \in \mathbb{R}$ e possui uma quantidade infinita de termos.

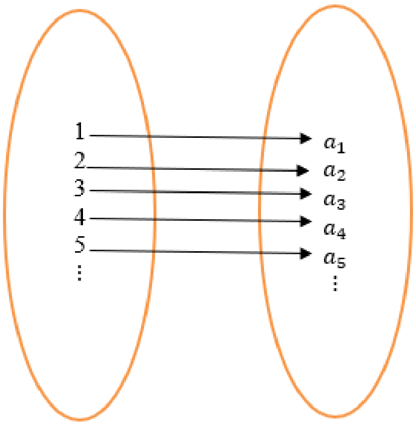

Figura 45: Diagrama ilustrativo de uma sequência infinita.
Fonte: Próprio autor.

A sequência (4, 7, 10, 13, 16, 19, ...) é exemplo de uma sequência infinita.

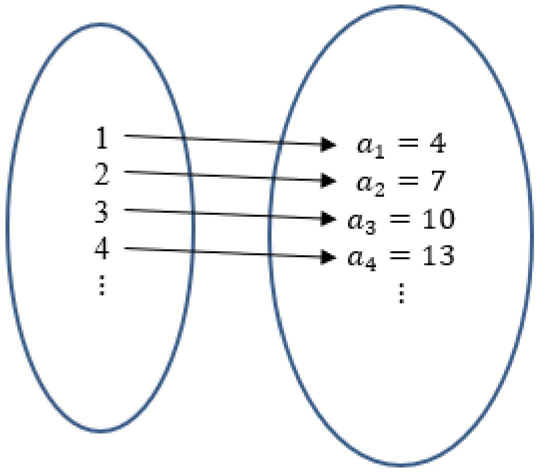

Figura 46: Exemplo de sequência infinita.
Fonte: Próprio autor.

1. Fractais, do latim *fractus*, significa fração, quebrado, e referem-se a figuras geométricas que têm como uma das principais características a autossimilaridade, ou seja, um padrão repetido tanto na parte quanto no todo. Um dos primeiros matemáticos a estudar os fractais foi o polonês Benoit Maldelbrot (1924-2010), e os estudos nessa área avançaram muito com os recursos computacionais atuais. Na natureza são encontrados exemplos de fractais em estruturas vegetais e animais. Eles também são artificialmente criados, como na imagem computadorizada a seguir, na qual cada parte do fractal é exatamente uma cópia do original.

Figura 47: Parte de um fractal.
Fonte: Vlad_Nikon/Shutterstock.com/ID/BR

Será exibido aos alunos o vídeo Arte Fractal y la Matemática que está disponível no YouTube, que aborda sobre a relação entre os fractais e a matemática.

Outro matemático com grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que tornou conhecido o Triângulo de Sierpinski no início do século XX, uma das formas elementares da geometria fractal. Observe:

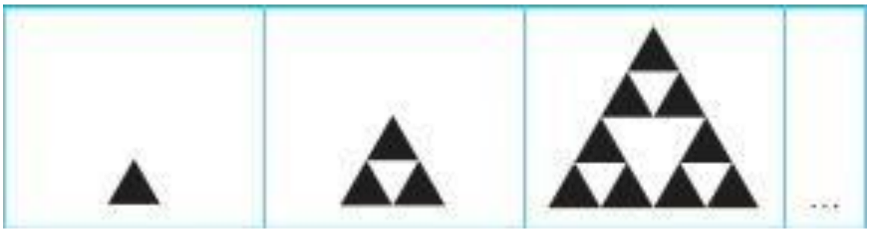

Figura 48: Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Sergio Lima/ID/BR

a) Quantos triângulos pretos tem em cada quadro?

R: No primeiro tem 1 triângulo preto, enquanto no segundo tem 3 e no terceiro tem 9 triângulos pretos.

b) Quantos triângulos pretos terá a 4ª figura?

R: Conforme o padrão apresentado, a 4ª figura terá um total de 27 triângulos pretos, ou seja,

$$3^3 = 27$$

c) Qual das sentenças a seguir pode expressar a quantidade de triângulos pretos da figura, que ocupam a enésima posição?

i. $a_n = 3n$;

ii. $a_n = n^3$;

iii. $a_n = 3^{n-1}$;

R: Analisando o padrão das figuras, temos:

i. Para a primeira figura, ou seja, $n = 1$ aplicando na sentença $a_n = 3n$ temos:

$$a_1 = 3 \times 1 = 3$$

Essa sentença não expressa a quantidade de triângulos pretos, pois o número de triângulos pretos na primeira figura é igual a $1 \neq 3$.

ii. Aplicando $n = 1$ na sentença $a_n = n^3$, temos:

$$a_1 = 1^3 = 1$$

Para a primeira figura, o valor obtido pela sentença corresponde ao número de triângulos pretos.

Aplicando $n = 2$ na mesma sentença:

$$a_2 = 2^3 = 8$$

Logo, o valor obtido pela sentença para a segunda figura não corresponde ao número de triângulos pretos expressos na sequência dada, ou seja, o número de triângulos é igual a 3 na segunda figura da sequência e o resultado da sentença é igual a 8.

iii. Aplicando $n = 1$ na sentença $a_n = 3^{n-1}$:

$$a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1$$

Para a primeira figura, o valor obtido pela sentença corresponde ao número de triângulos pretos.

Aplicando $n = 2$ na mesma sentença:

$$a_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3$$

Para a segunda figura, o valor obtido pela sentença também corresponde ao número de triângulos pretos.

Aplicando $n = 3$:

$$a_3 = 3^{3-1} = 3^2 = 9$$

Para a terceira figura, o valor obtido pela sentença também corresponde ao número de triângulos pretos.

Aplicando $n = 4$:

$$a_4 = 3^{4-1} = 3^3 = 27$$

O valor obtido pela sentença também corresponde ao número de triângulos pretos para a figura 4.

Dessa forma, nota-se que esta sentença expressa o número de triângulos pretos conforme a sequência de figuras. Logo, a expressão que permite calcular o número de triângulos pretos para a enésima figura é dada por:

$$a_n = 3^{n-1}$$

Progressão aritmética

Uma **progressão aritmética (P.A)** é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada por:

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Exemplos

1. $P_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

2. $P_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$

3. $P_3 = (4, 4, 4, 4, \dots)$

Após a definição de progressão aritmética, questionar aos alunos:

- Qual o primeiro termo de cada P.A? E qual constante r está sendo somada a cada termo?

R: Para a P_1 temos, o primeiro termo sendo 1 e a constante $r = 2$. Para a P_2 temos, o primeiro termo sendo 0 e a constante $r = -2$. Já para a P_3 temos, o primeiro termo igual a 4 e a constante $r = 0$.

Podemos classificar uma progressão aritmética de acordo com a razão r, em crescente, decrescente ou constante.

Crescentes são as P.A em que cada termo é maior que o anterior. Isso ocorre somente se $r > 0$.

Decrescentes são as P.A em que cada termo é menor que o anterior. Vemos que isto ocorre se $r < 0$.

Constantes são as P.A em que cada termo é igual ao anterior. Isto ocorre quando $r = 0$.

Voltar nos exemplos anteriores e questionar aos alunos como classificar P_1, P_2 e P_3.

$P_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ é uma P.A crescente pois r = 2 e 2 > 0.

$P_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$ é uma P.A decrescente, pois r = -2 e -2 < 0.

$P_3 = (4, 4, 4, 4, \dots)$ é uma P.A constante pois $r = 0$.

- As P.A. a seguir são crescentes, decrescentes ou constantes? Qual é a razão dessas P.A.?

$$P_4 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots)$$

$$P_5 = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots)$$

R: P_4 é uma P.A crescente pois

$$r = a_{n+1} - a_n$$
$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow r = 1 > 0$$

Já P_5 é uma P.A decrescente pois

$$r = a_{n+1} - a_n$$
$$\Rightarrow r = \frac{11}{3} - 4$$
$$\Rightarrow r - \frac{1}{3} < 0$$

Termo Geral de uma P.A.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer de uma P.A, conhecendo apenas o 1º termo e a razão. Para isso vamos observar os termos da P.A $(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 = a_1 + 4$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 9 = a_1 + 2 \times 4$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 13 = a_1 + 3 \times 4$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 17 = a_1 + 4 \times 4$$

Questionar aos alunos:

- Seria possível determinar o termo de qualquer posição? Como poderíamos fazer isso?

R: Podemos determinar qualquer termo utilizando a razão r e o primeiro termo a_1.

Em seguida, serão abordadas as propriedades da progressão aritmética.

Propriedade 1

Dados o primeiro termo a_1 de uma P.A e sua razão r, podemos determinar um termo em qualquer posição n da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

2. Qual é a razão de uma PA na qual o quarto termo é 30 e o décimo segundo termo é 62?

R: Seja $a_4 = 30$ e $a_{12} = 62$, temos que $a_{12} - a_4 = 8r$

Então seja: $62 = 30 + (12 - 4)r$

$$62 - 30 = 8r$$

$$32 = 8r$$

$$r = 4$$

3. Calcule o 17º termo da P.A cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

R: Sabemos que $a_1 = 3$ e $r = 5$, aplicando a fórmula do termo geral obtemos $a_{17} = a_1 + (17 - 1)r = 3 + 16.5 = 3 + 80 = 83$.

Propriedade 2

Numa P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Ilustração 1:

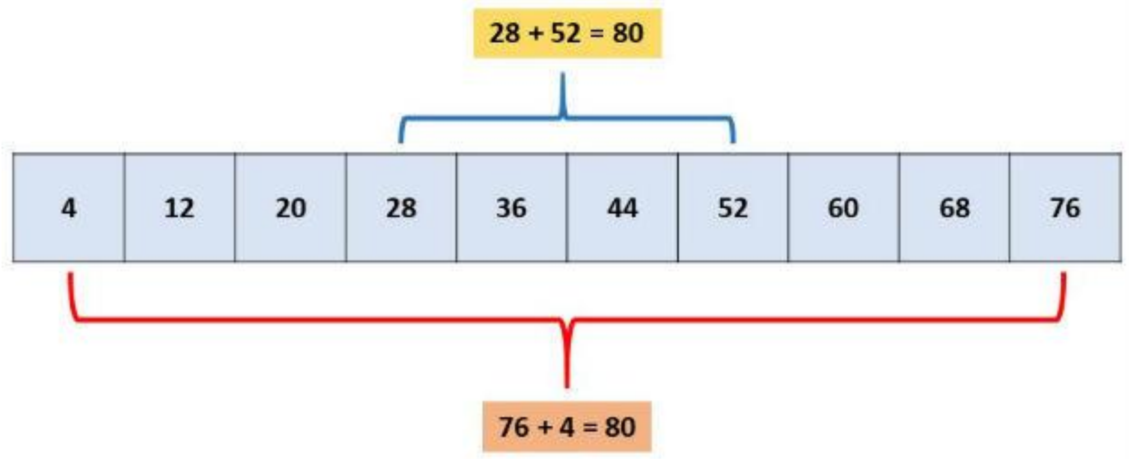

Figura 49: Ilustração da propriedade 2.
Fonte: https://www.todamateria.com.br/progressao-aritmetica/

Exemplo 4:

Considere a P.A. (3, 6, 9, 12, 15, 18). Pela propriedade 2, temos:

$$a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

$$3 + 18 = 21$$

$$6 + 15 = 21$$

$$9 + 12 = 21$$

Exemplo 5:

No problema 1, onde o menino Gauss conseguiu fazer a soma de todos os números da sequência de 1 a 100, ele percebeu que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja, ele utilizou a propriedade 2 para resolver o exercício.

Propriedade 3

Uma sequência de três elementos é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{é } P.A. \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

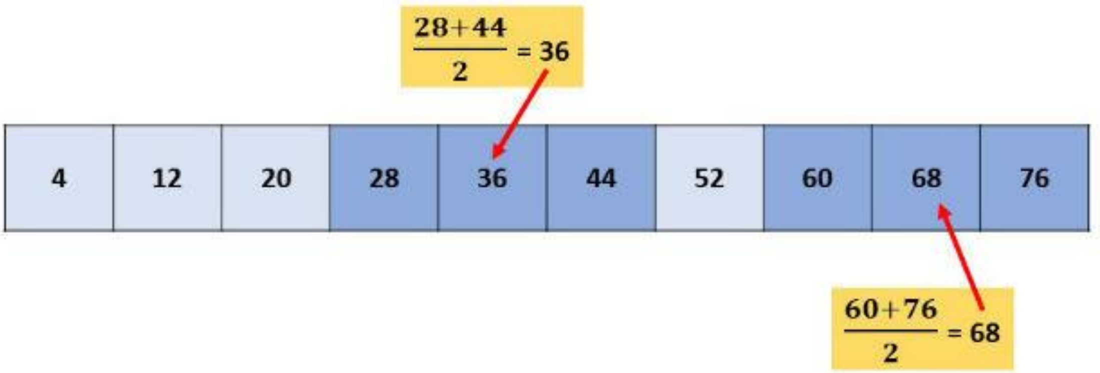

Figura 50: Ilustração da propriedade 3.
Fonte: https://www.todamateria.com.br/progressao-aritmetica/

Então será demonstrada para os alunos esta propriedade, da seguinte forma:

Como se trata de uma P.A. logo existe uma razão $r \in \mathbb{R}$, tal que $b = a + r$ e $c = a + 2r$. Assim ao fazer a média aritmética entre a e c obtemos:

$$\frac{a+c}{2} = \frac{a+(a+2r)}{2} = \frac{2a+2r}{2} = \frac{2(a+r)}{2} = a + r = b$$

Ou seja, o termo médio.

Exemplo 6: Mostre que a sequência (2, 6, 10) é P.A.

R: Pela última propriedade vista, se 6 for igual à média aritmética de 2 e 10, então é P.A. caso contrário, não é P.A. Assim:

$$\frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

É P.A.

4. Determine x para que a sequência $(8, x, 22)$ seja uma P.A.

R:

$$x = \frac{8+22}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Logo para a sequência ser uma P.A. o valor de x deve ser 15.

5. Determine x para que a sequência $(3 + x, 5x, 2x + 11)$ seja P.A.

R: A sequência é P.A. se, e somente se,

$$5x = \frac{(3+x)+(2x+11)}{2}$$

$$5x = \frac{3x+14}{2}$$

$$10x = 3x + 14$$

$$7x = 14$$

$$x = 2.$$

6. (UPE-SSA) As medidas dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

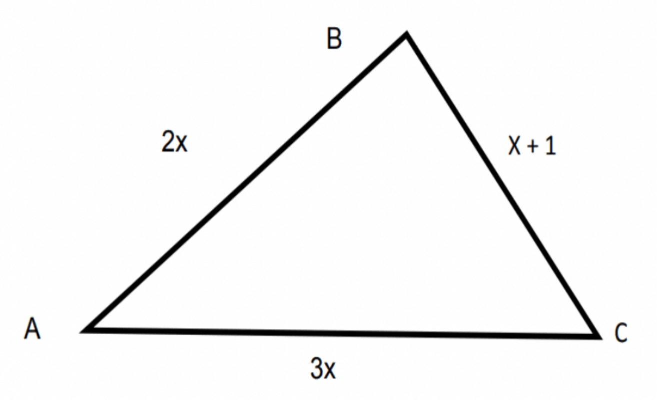

Figura 51: Triângulo ABC.
Fonte: Próprio autor.

Qual é a medida do perímetro desse triângulo?

R: Da propriedade 3 temos

$$(AB + CA) \div 2 = BC$$

$$(2x + 3x)2 = x + 1$$

$$5x = 2x + 2$$

$$5x - 2x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Portanto, o perímetro mede $3 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{15}{3} = 5$ um.

Com o intuito de introduzir o conceito de soma dos termos de uma P.A., será solicitado aos alunos que resolvam o seguinte exercício:

7. Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga $R\$\ 140{,}00$. A partir daí, o valor da mensalidade decresce $R\$\ 8{,}00$ a cada mês. Que valor total anual o aluno pagará?

R: Sabemos que o valor a ser pago em janeiro é de $R\$\ 140{,}00$, logo esse é o primeiro termo da nossa P.A. Sabemos também que decresce 8 reais a cada mês, logo a razão é igual a -8, desse modo, temos que a nossa P.A. é:

$$\{140, 140 - 8, 140 - 16, 140 - 24, \ldots, 140 - 96\}$$

$$\Rightarrow \{140, 132, 124, 116, 108, 100, 92, 84, 76, 68, 60, 52\}$$

Para saber o valor total anual que o aluno pagará, devemos somar todos os termos da P.A. encontrada:

$$140 + 132 + 124 + 116 + 108 + 100 + 92 + 84 + 76 + 68 + 60 + 52 = 1152$$

Logo, será pago um valor total anual de $R\$\ 1152{,}00$.

Será deixado um tempo para os alunos resolverem e depois serão discutidas as respostas obtidas pela turma para então fazer a correção do exercício em conjunto.

Após a correção e discussão, será apresentado o método de soma dos termos de uma P.A.

> A **soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos** de uma P.A. (a_n) é dada por:
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Após a formalização, será resolvido novamente o Exercício 7 utilizando a fórmula apresentada:

7. Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga $R\$\ 140{,}00$. A partir daí, o valor da mensalidade decresce $R\$\ 8{,}00$ a cada mês. Que valor total anual o aluno pagará?

R: Utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A., temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Sabemos que $a_1 = 140$ e $n = 12$, mas não sabemos quem é a_n. Dessa forma, para descobrir o termo a_n utilizamos a fórmula do termo geral:

$$a_{12} = 140 + (12 - 1)(-8)$$

$$\Longrightarrow a_{12} = 140 - 88$$

$$\Longrightarrow a_{12} = 52$$

Após encontrado o termo a_n, podemos calcular a soma dos 12 termos da P.A.:

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{(140 + 52)12}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{2304}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = 1152$$

Dessa forma, será pago um valor total anual de $R\$\ 1152{,}00$.

Para finalizar a aula vamos disponibilizar um quiz disponível no kahoot, para revisar e fixar o conteúdo de progressão aritmética. As questões que serão disponibilizadas no quiz estão a seguir.

1. Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda, assim por diante. Quantos Km percorrerá na sexta hora?

R:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_6 = 40 + (6-1)(-6)$$
$$a_6 = 40 + \big(5 \times (-6)\big)$$
$$a_6 = 40 - 30 = 10$$

2. Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda hora, assim por diante. Quantos Km percorrerá em 6 horas?

R:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)6}{2}$$
$$S_6 = \frac{(40 + 10)6}{2}$$
$$S_n = \frac{50 \times 6}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

3. A razão da P.A (57, 50, 43, 36, ...) é 7.

R: Falso, a razão é -7.

4. Verifique as sequências numéricas e indique qual delas não é uma PA.

(2, 5, 8, 11, 14)

(18, 15, 12, 8, 5, 2, 0)

(3, 3, 3, 3)

(9, 7, 5, 3, ...)

R: Analisando os termos da sequência vemos que (18, 15, 12, 8, 5, 2, 0) não é uma P.A.

5. Quantos elementos tem a PA finita: $(-6, -10, -14, \ldots, -134)$?

R:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$-134 = -6 + (n-1)(-4)$$

$$-134 = -6 - 4n + 4$$
$$-134 + 2 = -4n$$
$$-132 = -4n$$
$$n = \frac{-132}{-4} = 33$$

6. O trigésimo primeiro termo de uma progressão aritmética de primeiro termo 2 e razão 3 é:

R:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{31} = 2 + (31-1)3$$
$$a_{31} = 2 + 30 \times 3$$
$$a_{31} = 92$$

Avaliação:

Será analisado durante a aula se os alunos são capazes de reconhecer uma progressão aritmética em uma sequência numérica, compreender as propriedades de uma progressão aritmética, perceber como somar uma progressão aritmética finita, e resolver problemas variados que envolvem uma P.A por meio de participação nos questionamentos e nas atividades online. Toda forma de participação e interação será considerada para o desenvolvimento da aula.

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES. D. **Quadrante: Matemática 1**. São Paulo: SM, 2016.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 4:** Sequências Matrizes Determinantes Sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

KAHOOT. Disponível em: <https://kahoot.com/?utm_name=controller_app&utm_source=controller&utm_campaign=controller_app&utm_medium=link>. Acesso em: 17 mar. 2021.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática 1**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MENTIMETER. Disponível em: <https://www.mentimeter.com/>. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

MORENO, M. P. **Arte Fractal y la Matemática**. Youtube, 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=sQlNJzQXhIA. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

4.5.2 Relatório da aula 5

No dia 10 de abril, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jitsi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:30 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado com a presença de 12 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, embora no encontro passado 15 alunos acessaram o link da aula.

Iniciamos a aula pedindo para que os alunos somassem os números de um a seis e depois de um a dez que estavam ilustrados no Power point. Obtivemos respostas corretas e então questionamos como realizaram essas somas. Vários alunos explicaram a forma e ordem de como realizaram as adições por meio do chat. Em seguida, foi apresentado o problema de Gauss, no qual ele somou os números de um a cem em poucos instantes. Após a introdução do problema, solicitamos que os alunos tentassem resolver. Dois alunos explicaram pelo chat a seguinte solução: somar o primeiro com o penúltimo (1+99)=100, em seguida somar o segundo com o antepenúltimo (2+98)= 100 e assim por diante até chegar em (49+51)=100. Resultando em 49 parcelas de 100. No entanto o 100 e o 50 não foram agrupados, disso temos 50 parcelas de 100, ou seja, 50x100= 5000 que somado ao 50 resulta em 5050

O conceito de sequência foi introduzido utilizando a apresentação do Power point, foi questionando se sabiam o que significava esse termo e se podiam dar exemplos. O exemplo dado pelos alunos por meio do chat foram os números de um a cem e que uma sequência possui ordem e padrão. Ao apresentar a definição de sequência infinita foi encontrado um erro na escrita da definição, então utilizamos apenas o diagrama de flechas que representava uma sequência infinita sendo suficiente para a compreensão do conteúdo.

Logo após a definição de sequência foi trabalhado um exercício, contextualizando sobre a utilização de fractais na matemática e na vida real. O exercício trazia o Triângulo de Sierpinski que faz parte da geometria, conforme a imagem a seguir:

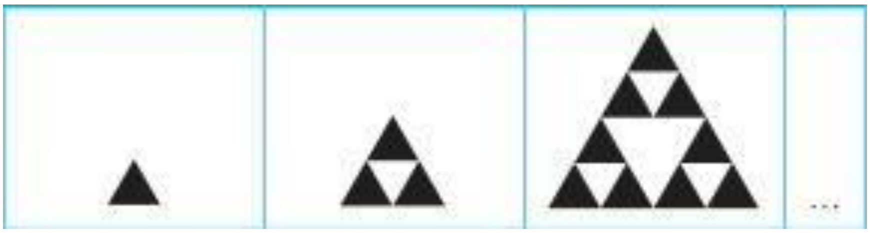

Figura 52: Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Sergio Lima/ID/BR

Os alunos conseguiram perceber um padrão e calcularam a quantidade de triângulos pretos para uma quarta figura conforme cada quadro. A dificuldade encontrada pelos alunos foi na parte em que foi apresentada as sentenças i) $a_n = 3n$, ii) $a_n = n^3$ e iii) $a_n = 3^{n-1}$ e solicitado para que eles identificassem qual delas expressava a quantidade de triângulos pretos para uma enésima figura. Inicialmente, eles não compreenderam como iriam descobrir qual das sentenças i, ii ou iii estava correta. Quando iniciamos a resolução dessa questão, os alunos não conseguiram identificar que estavam sendo testadas todas as hipóteses apresentadas pelo exercício. Ao decorrer da resolução, os alunos conseguiram compreender o que devia ser feito e visualizaram o motivo pelo qual a sentença $a_n = 3^{n-1}$ estava correta.

Em seguida foi definido o que é uma Progressão aritmética e suas classificações: crescente, decrescente e constante, seguido por um exercício de fixação o qual tinha por objetivo classificar e encontrar a razão de duas P.A. Um aluno não compreendeu os conceitos e a resolução, sendo esclarecido posteriormente com uma nova explicação.

Após este momento, foi apresentado três propriedades de progressão aritmética, e resolvido rapidamente dois exercícios de fixação da primeira propriedade. Os demais exercícios das propriedades restantes e uma questão de vestibular não foram abordados em vista da falta de tempo necessário para a realização.

Foi planejado aplicar um exercício que abordava a seguinte situação: “Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga $R\$\ 140{,}00$. A partir daí, o valor da mensalidade decresce $R\$\ 8{,}00$ a cada mês. Que valor total anual o aluno pagará?”

Era esperado que eles somassem termo a termo para encontrar o resultado. Após a resolução seriam discutidas as respostas e formalizada a soma dos n primeiros termos de uma P.A para então retomar o exercício utilizando a definição formalizada. Devido à falta de tempo, foi passado a definição da soma dos n primeiros termos de uma P.A. e então foi pedido aos alunos que resolvessem o exercício já utilizando a definição passada.

Foi observado que os alunos participaram e interagiram de forma ativa na aula, notou-se que houve compreensão por parte dos alunos sobre o conteúdo abordado devido a quantidade de respostas corretas e o modo como resolveram. Por fim, para revisão, diversificação e avaliação realizou-se um quiz no *Kahoot* sobre o conteúdo de progressão aritmética.

4.6 Módulo/encontro 6 -

4.6.1 Plano de aula

Conteúdo: Progressão geométrica: definição, classificação, propriedades, termo geral e soma dos n primeiros termos.

Público-Alvo: Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino e inscritos no projeto.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de progressão geométrica.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer uma progressão geométrica em uma sequência numérica;
- Compreender e aplicar as propriedades de uma progressão geométrica;
- Perceber como somar os termos de uma progressão geométrica finita;
- Resolver problemas variados que envolvem uma PG;

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Power point, Mentimeter, Youtube, papel, Jitsi.

Encaminhamento metodológico:

-Progressão geométrica

Para dar início a aula, o professor irá passar um vídeo disponível no link <https://www.youtube.com/watch?v=MZJ_2weYsXU> que ilustra a história da “lenda sobre a origem do jogo de xadrez” de Malba Tahan descrita a seguir:

“Numa província indiana chamada Taligana havia um poderoso rei chamado Iadava. O rei encontrava-se mergulhado em profunda tristeza porque seu amado filho, o príncipe Adjamir teria sido morto em combate num campo de batalha ao lutar patrioticamente para defender o seu reino.

Certo dia o rei foi visitado por um jovem brâmane chamado Lahur Sessa, que ao saber do acontecido teria inventado um jogo no intuito de distrair o rei. O que Sessa trazia ao rei Iadava tratava-se de um grande tabuleiro quadrado, dividido em 64 quadradinhos, ou casas brancas e negras com diversas peças que representavam a infantaria, os elefantes de guerra, a cavalaria, os dois vizires do rei, a rainha e o próprio rei.

Sessa explicou as regras do jogo e o rei ao ver que este se assemelhava à batalha em que perdera seu filho passou a interessar-se cada vez mais e a praticar o jogo. Isso lhe trouxe conforto espiritual, pois passou a se conformar com a morte do príncipe Adjamir.

O rei, agradecido, insistiu para que Sessa aceitasse uma recompensa por sua invenção e o brâmane pediu que o pagamento fosse feito em grãos de trigo, da seguinte forma: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro pela terceira casa, oito pela quarta e assim sucessivamente até a última casa, sempre dobrando a quantidade de grãos de uma casa para a outra.

Inconformado com a modéstia do pedido, o rei ordenou que fosse pago imediatamente a quantia em grãos que fora pedida. Mandou chamar os algebristas mais hábeis da corte para calcular a porção de trigo que Sessa pretendia. Após algumas horas de estudos os sábios calculistas retornaram ao salão para anunciar ao rei o resultado de seus cálculos, espantados com o resultado, pois segundo eles, toda a safra do reino durante 2.000 séculos não seria suficiente para pagar a recompensa devida ao brâmane Sessa. Impressionado com a inteligência do brâmane, o rei o convidou para ser o principal vizir do reino, sendo perdoado por Sessa de sua grande dívida em trigo."

O vídeo será pausado no momento em que o rei solicita aos sábios calculistas para fazer o cálculo da quantidade de grãos de trigo pedida e será feita a seguinte pergunta:

- Vamos supor que os sábios calculistas sejam vocês. Vocês conseguem realizar o cálculo do número de grãos de trigo que o rei terá que dar a Sessa? Qual seria esse número?

Será disponibilizado o link https://www.menti.com/vdfwopx6qs da plataforma Mentimeter para que os alunos escrevam suas respostas após tentarem resolver a pergunta. O link fornecido tem o intuito de gerar uma nuvem de palavras com as respostas escritas pelos alunos possibilitando analisar se eles conseguiram resolver o problema proposto. Caso eles não tenham conseguido resolver, será pedido a eles que chutem valores que eles imaginam se aproximar do valor exato. As respostas serão discutidas e então será realizada a correção juntamente com os alunos sendo realizados os seguintes questionamentos:

- Como foi a forma em que Sessa pediu os grãos de trigo?

R: Ele pediu 1 grão de trigo na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira, 8 na quarta e assim sucessivamente.

- Há um padrão na sequência dita por Sessa? De que forma os números aumentam? Qual seria esse padrão de crescimento?

R: Há um padrão em que o número de grãos de trigo t em cada casa n é dado pelo número de grãos da casa anterior multiplicado por 2, ou seja, é representado pela potência de 2. Desse modo, na primeira casa o número de grãos de trigo é dado por $2^0 = 1$, na segunda casa o número de grãos é dado por $2^1 = 1$, na terceira casa é dado por $2^2 = 4$ e assim sucessivamente para as demais casas.

- Sabendo que há esse padrão, é possível calcular a quantidade de trigo para qualquer casa do tabuleiro?

R: Sim, basta pegarmos o número n da casa em que se deseja saber e elevar o número 2 a $n - 1$.

Feito os questionamentos será então formalizada a resposta:

Como observado, Sessa pediu 1 grão de trigo na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira e assim sucessivamente. O número de grãos de trigo pode ser representado pela potência de 2, ou seja:

Quadro 10: Quantidade de grãos de acordo com a casa do tabuleiro.

Número da casa (n)	**Número de grãos de trigo (t)**
$\mathbf{1}$	$1 = 2^0$
$\mathbf{2}$	$2 = 2^1$
$\mathbf{3}$	$4 = 2^2$
$\mathbf{4}$	$8 = 2^3$
. . .	. . .
$\boldsymbol{n}$	2^{n-1}

Fonte: Próprio autor.

Para saber o total de grãos de trigo que o rei deveria dar a Sessa, basta somar a quantidade de grãos obtida em todas as casas:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 9.223.372.036.854.775.808 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Após a resolução, será retomado o vídeo para que a resposta seja confirmada. E então será formalizado o conceito de progressão geométrica.

Analisando a sequência $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{63}\}$ que representa os grãos de trigo, nota-se que essa sequência segue um padrão como já foi observado anteriormente, em que o número de grãos de trigo é dado pela multiplicação da quantidade de grãos obtida na casa anterior por 2. Nesse caso, a sequência iniciou com o número 1, logo, o próximo número da sequência será o número 1 multiplicado por 2 e assim sucessivamente para as demais casas. Esse tipo de sequência caracteriza uma Progressão Geométrica.

Uma **progressão geométrica** é uma sequência de números em que depois do primeiro termo, cada termo é a multiplicação do número anterior por uma constante q chamada razão da P.G.

Exemplos de progressões geométricas:

1) $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$

2) $f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \dots)$

3) $f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$

4) $f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3})$

5) $f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \dots)$

6) $f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \dots)$

7) $f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ \dots)$

Logo após será apresentado como calcular a razão de uma P.G.

Quando $a_{n-1} \neq 0$, a razão pode ser calculada fazendo-se $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para $n \geq 2$.

Para identificar a razão e auxiliar na explicação das classificações de progressão geométrica faremos o seguinte questionamento aos alunos:

- Qual a razão de cada P.G.?

R: $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ $a_1 = 1$ e $q = 2$.

$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \dots)$, $a_1 = -1$ e $q = 2$.

$f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$, $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$.

$f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3})$, $a_1 = -54$ e $q = \frac{1}{3}$.

$f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \dots)$, $a_1 = 7$ e $q = 1$.

$f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \dots)$, $a_1 = 5$ e $q = -1$.

$f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ \dots)$, $a_1 = 3$ e $q = 0$.

Após apresentarmos a definição de progressão geométrica e alguns exemplos vamos trabalhar a classificação de uma P.G.

Uma progressão geométrica pode ser classificada em cinco categorias.

1- Uma P.G. é **crescente** quando cada termo da sequência é maior que o anterior.

a) P.G. com termos positivos e $q > 1$.

Por exemplo: $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ onde os termos da P.G. são positivos e $q = 2 > 1$.

b) P.G. com termos negativos e $0 < q < 1$.

Por exemplo: $f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3})$ onde os termos da P.G. são negativos e $0 < q = \frac{1}{3} < 1$.

2- Uma P.G. é **constante** quando cada termo da sequência é igual ao anterior. Isso pode acontecer em dois casos:

a) Em uma P.G. com termos nulos, onde $a_1 = 0$ e razão q qualquer. Teremos uma P.G. da forma $(0, 0, 0, 0, \ldots)$. Podemos observar que, para qualquer q multiplicado ao primeiro termo sempre teremos resultado igual a zero.

b) Em uma P.G. com termos iguais e não nulos. Neste caso a razão $q = 1$.

Por exemplo: $f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ os termos dessa P.G sempre serão 7, pois $a_1 = 7$ e a razão $q = 1$.

3- Uma P.G é **decrescente** quando cada termo da sequência é menor que o anterior. Isso acontece em dois casos:

a) P.G com termos positivos e $0 < q < 1$.

Por exemplo: $f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$, seus termos são positivos e $0 < q = \frac{1}{3} < 1$. Podemos observar que cada termo da P.G. é menor que o anterior, por exemplo:

$$a_2 < a_1 \Rightarrow \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow 0{,}333 < 1$$

$$a_3 < a_2 \Rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{3} \Rightarrow 0{,}111 < 0{,}333$$

b) P.G com termos negativos e $q > 1$ é uma P.G. decrescente.

Por exemplo: $f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$, seus termos são negativos e $q = 2 > 1$. Observemos que cada termo desta P.G. é menor que o anterior.

$$a_2 < a_1 \Rightarrow -2 < -1$$

$$a_3 < a_2 \Rightarrow -4 < -2$$

Podemos observar na reta numérica que para os números negativos, quanto mais próximos do zero maiores eles são.

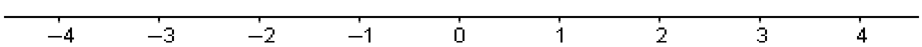

Figura 53: Reta numérica.
Fonte: Próprio autor.

4- Uma P.G. em que cada termo possui sinal contrário do termo anterior é chamada de progressão geométrica **alternada**, ou seja, o sinal dos números se alterna. Isso ocorre quando $q < 0$.

Por exemplo: $f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \ldots)$ onde $a_1 = 5$ e $q = -1 < 0$.

Observemos que

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = -1 \times 5 = -5$$
$$a_3 = -1 \times -5 = 5$$
$$a_4 = -1 \times 5 = -5$$

Neste momento, vamos construir com a colaboração dos alunos na apresentação do Power Point uma P.G alternada, pedir para eles que digam um termo a_1 e uma razão q negativa.

5- Uma P.G em que apenas o primeiro termo da sequência é diferente de zero e a razão da P.G. é $q = 0$, é chamada de **estacionária**, ou seja, são as P.G em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$. Isso ocorre quando $q = 0$.

Por exemplo: $f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ \ldots)$.

1. (PUC) Se a razão de uma P. G. é maior que 1 e o primeiro termo é negativo, a P. G. é chamada:

a) Decrescente
b) Crescente
c) Constante
d) Alternada
e) Estacionária

Resolução:

Decrescente, pois se o primeiro termo é negativo e a razão é maior que 1, teremos os seguintes termos também negativos e cada termo será menor que o anterior.

2. O segundo termo de uma P. G. crescente tal que $a_1 = 8$ e $a_3 = 18$ é igual a:

Resolução:

Temos uma P.G. da forma (8, x, 18), sabemos que $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para esta P.G. temos

$q = \frac{x}{8}$ e $q = \frac{18}{x}$

Como em uma P.G. a razão é sempre a mesma obtemos

$$\frac{x}{8} = \frac{18}{x}$$

$$x^2 = 8.18$$

$$x = \pm\sqrt{144}$$

$x = 12$ ou $x = -12$

Como sabemos que a P.G. é crescente $a_2 = 12$.

Em seguida vamos introduzir o termo geral de uma P.G., para isso, vamos propor que os alunos resolvam o exercício a seguir:

3. **(Vunesp – SP – Adaptado)** Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

Quadro 11: Quantidade de tábuas de acordo com o número da pilha.

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
1 tábua	2 tábuas	4 tábuas	8 tábuas

Fonte: Próprio autor.

Determine a quantidade de tábuas empilhadas na 8ª pilha.

Resolução:

Cada pilha possui o dobro da pilha anterior, logo sabemos que a razão da P.G. é 2. Podemos calcular então até a 8ª pilha.

Percebemos que as tábuas são empilhadas de acordo com uma progressão geométrica. Assim, podemos organizar os valores do quadro acima como uma P.G. (1, $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$).

Quadro 12: Quantidade de tábuas de acordo com o número da pilha.

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha	5ª pilha	6ª pilha	7ª pilha	8ª pilha
1 tábua	2 tábuas	4 tábuas	8 tábuas	16 tábuas	32 tábuas	64 tábuas	128 tábuas

Fonte: Próprio autor.

Logo, na 8ª pilha teremos 128 tábuas.

4. No sábado passado, Paula enviou uma mensagem por e-mail para três amigos. No dia seguinte, cada amigo de Paula que recebeu o e-mail enviou-o para três amigos, e assim por

diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, descubra quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte.

Resolução:

Bem, se no primeiro dia Paula enviou a mensagem para três amigos, e no dia seguinte cada um desses mesmos amigos enviaram para outros três amigos, e assim por diante, então podemos escrever a sequência dos dias da semana como uma progressão geométrica de razão três, assim temos:

Quadro 13: Quantidade de mensagens enviadas de acordo com o dia da semana.

Sábado	3	3^1
Domingo	$3 \times 3 = 9$	3^2
Segunda	$9 \times 3 = 27$	3^3
Terça	$27 \times 3 = 81$	3^4
Quarta	$81 \times 3 = 243$	3^5
Quinta	$243 \times 3 = 729$	3^6
Sexta	$729 \times 3 = 2187$	3^7
Sábado	$2187 \times 3 = 6561$	3^8

Fonte: Próprio autor.

Ou seja, podemos escrever como uma P.G finita de oito elementos:

$$(3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561)$$

Agora para descobrir quantas pessoas receberam a mensagem basta somar todos esses valores encontrados:

$$3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 = 9840.$$

Logo, 9840 pessoas receberam a mensagem de Paula.

-Termo geral de uma P.G.

Para explicação, voltaremos a P.G. do exercício 3.

Para encontrar o termo da 8ª posição conseguimos calcular facilmente, mas se quisermos saber os termos da 20ª posição ou da 100ª posição teríamos uma sequência muito grande de números, dificultando nosso trabalho.

Dessa forma, assim como encontramos uma expressão para um termo geral de uma P.A. podemos encontrar uma expressão para o termo geral de uma P.G.

Podemos encontrar qualquer termo de uma progressão geométrica sabendo a_1 e a razão q.

Vamos analisar os termos da P.G. $(1,\ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots)$.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 4 = 1 \times 2^2$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 8 = 1 \times 2^3$$
$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 16 = 1 \times 2^4$$
$$n = 6 \Rightarrow a_6 = 32 = 1 \times 2^5$$
$$n = 7 \Rightarrow a_7 = 64 = 1 \times 2^6$$
$$n = 8 \Rightarrow a_8 = 128 = 1 \times 2^7$$

Percebemos que existe um padrão na forma como podem ser escritos os números de uma P.G. Observemos que, para essa P.G. $a_1 = 1$, $q = 2$ e cada expoente pode ser escrito como o número da posição menos um. Então podemos expressar um termo geral para uma P.G. da seguinte forma:

Dados o primeiro termo $a_1 \neq 0$, a razão $q \neq 0$ e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Exemplo 1: Calcular o termo da 20ª posição da P.G. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots)$.

Sabemos que $a_1 = 1$ e $q = 2$ e $n = 20$, utilizando a fórmula do termo geral temos:

$$a_{20} = 1 \times 2^{20-1}$$
$$a_{20} = 1 \times 2^{19}$$

$a_{20} = 524288$ serão introduzidas algumas propriedades de progressão geométrica.

Propriedade 1.

Numa P.G. finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo: Dada a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32)

$$a_1 \times a_6 = a_2 \times a_5 = a_3 \times a_4$$
$$1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8 = 32$$

Propriedade 2.

Em uma P.G., tomando-se três termos consecutivos, o termo central é a raiz quadrada do produto do antecessor com o sucessor.

Exemplo:

Dada a P.G. (1, 3, 9, 27, 81, 243)

$M_g = \sqrt{1 \times 9} = 3$

$M_g = \sqrt{3 \times 27} = 9$

$M_g = \sqrt{9 \times 81} = 27$

$M_g = \sqrt{27 \times 243} = 81$

-Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. não constante ($q \neq 1$), com o primeiro termo a_1, pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

S_n = Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

a_1 = Primeiro termo da P.G.

q = Razão da P.G.

n = Quantidade de termos da P.G.

Apresentada a definição, abordaremos o exercício 4 já trabalhado, utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G.:

$$(3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561)$$

Neste caso, temos:

$S_n = ?$

$a_1 = 3$

$q = 3$

$n = 8$

Como $q \neq 1$, então podemos calcular S_n

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{3.(3^8 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_n = \frac{3.(6560)}{2}$$

$$S_n = \frac{3.(6560)}{2}$$

$$S_n = \frac{19680}{2} = 9840.$$

5. (Unioeste, 2018). A Figura 1 apresenta uma sequência de figuras de bonecos com corpo e pernas no formato retangular e cabeça circular. As dimensões do primeiro boneco são apresentadas na Figura 2 (Na Figura 2, $\boldsymbol{r}$ é o raio do círculo). Sabe-se que cada uma das medidas do n-ésimo boneco é igual à metade da medida correspondente do (n-1)-ésimo boneco. Assim, se A_1, é a área do primeiro boneco, então é CORRETO afirmar que a soma das áreas dos 30 primeiros bonecos é:

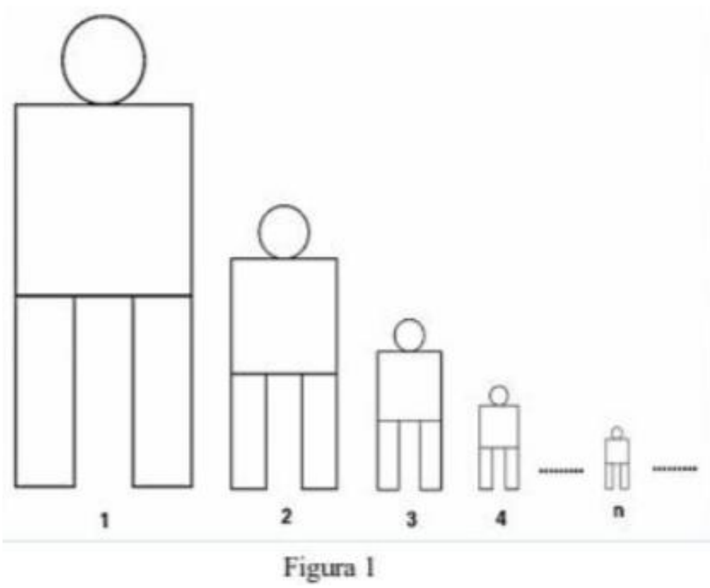

Figura 54: Bonecos citados no exercício.
Fonte: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores

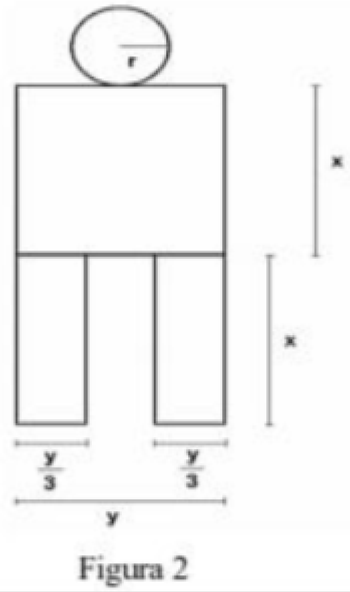

Figura 55: Dimensões do primeiro boneco.
Fonte: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores

a) $\frac{A_1}{3} \times \left(\frac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$

b) $A_1 \times \left(\frac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$

c) $\frac{A_1}{4} \times \left(\frac{2^{30}-1}{2^{29}}\right)$

d) $\frac{A_1}{2} \times \left(\frac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$

e) $A_1 \times \left(\frac{2^{30}-1}{2^{29}}\right)$

Resolução:

Como as medidas do segundo boneco corresponde à metade das medidas do primeiro, e por sua vez o terceiro corresponde à metade das medidas do segundo, e assim por diante, temos então que a razão das áreas dos bonecos será $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou seja, $q = \frac{1}{4}$, além disso o exercício nos indica que o nosso primeiro termo é $a_1 = A_1$. Bem, como o objetivo é achar a soma dos 30 primeiros termos então $n = 30$. Logo basta aplicarmos essas informações na fórmula:

$S_{30} = ?$

$q = \frac{1}{4}$

$a_1 = A_1$

$n = 30$

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{30} = \frac{A_1.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{30} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1}$$

$$S_{30} = \frac{A_1.\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{30} - 1\right)}{-\frac{3}{4}}$$

$$S_{30} = \frac{A_1}{3}.(-4).\left(\frac{1}{4^{30}} - 1\right)$$

$$S_{30} = \frac{A_1}{3}.\left(-\frac{4}{4^{30}} + 4\right)$$

$$S_{30} = \frac{A_1}{3}.\left(-\frac{1}{4^{29}} + 4\right)$$

$$S_{30} = \frac{A_1}{3} . \left(\frac{4^{30} - 1}{4^{29}}\right)$$

Logo, a alternativa a) é a correta.

-Notações Especiais

Quando procuramos obter uma PG com 3 ou 4 termos é prático utilizar as seguintes notações:

- Para 3 termos;

$$PG\ (x, xq, xq^2)$$

$$PG\ \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

- Para 4 termos;

$$PG\ (x, xq, xq^2, xq^3)$$

6. Escreva três números em P.G. cujo produto seja 27 e a soma dos dois últimos seja 15.

Resolução:

Temos a $PG\ \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, onde $\frac{x}{q}. x. xq = 27$ e $x + xq = 15$, então:

$\frac{x}{q}. x. xq = 27$, $x^3 = 27$

Então $x = 3$

Sendo $x = 3$, obtemos de $x + xq = 15$;

$$3 + 3q = 15$$

$$3q = 15 - 3$$

$$q = 4$$

Logo temos a P.G. $\left(\frac{3}{4}, 3, 12\right)$.

UNICENTRO 2018- Sabendo-se que as medidas, em metros, dos lados de um triângulo estão em progressão geométrica, nessa ordem, e são expressas por $x + 1$, $2x$ e $x2$, pode-se concluir que a medida do perímetro, desse triângulo, é:

UNICENTRO 2019-Enquanto a sequência crescente $(2, x, y, \ldots)$ forma, nesta ordem, uma progressão aritmética, a sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{X}, \frac{1}{8+Y}$ forma, nesta ordem, uma progressão geométrica decrescente. A razão da progressão geométrica é;

Referências

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 4:** Sequências Matrizes Determinantes Sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

LEONARDO, F. **Conexões com a matemática, 1º ano**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.
PROGRESSÃO GEOMÉTRICA – EXERCÍCIOS. Cola da web. Disponível em:< https://canaltech.com.br/internet/como-fazer-referencia-sites-no-padrao-abnt/#:~:text=Exemplos%20de%20como%20fazer%20refer%C3%AAncia%20de%20sites%20na%20ABNT&text=SOBRENOME%2C%20Nome.,for%20poss%C3%ADvel%20localiz%C3%A1%2Dla).>. Acesso em: 15 abr. 2021.
MENTIMETER. Disponível em: <https://www.mentimeter.com/>. Acesso em: 17 de mar. de 2021.

QUESTÕES DE VESTIBULAR DE MATEMÁTICA – PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - PG. Qconcursos.com. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/disciplinas/matematica-matematica/progressao-geometrica-pg/questoes> Acesso em: 15 abr. 2021.

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 92. ed. Rio de Janeiro: Record, 2018.
1 1 LENDA sobre a origem do jogo de xadrez. Produção de Carla Pixiúba. 2020, 5 min, son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MZJ_2weYsXU>. Acesso em: 16 abr. 2021.

4.6.2 Relatório da aula 6

No dia 17 de abril, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jitsi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:30 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado e contamos com a presença de 12 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta e o número de alunos presenes eram o mesmo do encontro anterior.

Iniciamos a aula com um vídeo que conta a história da lenda do xadrez de Malba Tahan que retrata a situação de Sessa, um jovem brâmane que inventou um jogo para alegrar o rei que perdera seu filho e estava em profunda tristeza. Grato pela generosidade, o rei ordenou que Sessa pedisse uma recompensa. Atendendo às ordens do rei, Sessa pediu o pagamento em grãos de trigo sendo calculado de forma em que fosse considerado um grão para a primeira casa, dois na segunda, quatro na terceira e dobrando dessa forma até a última casa do tabuleiro. Para fazer os cálculos, o rei pediu aos sábios que somassem a quantidade de grãos de trigo que teria de dar ao jovem e desmaiou ao saber que não teria como pagar a dívida devido ao altíssimo número que resultou da soma do pedido de Sessa.

Foi pausado o vídeo quando o rei pediu aos sábios que fizessem a soma dos grãos e solicitado aos alunos que fizessem esse cálculo supondo que eles fossem os sábios. Ao fazer a conta eles deveriam escrever suas respostas na plataforma interativa Mentimeter. Os alunos demonstraram grande interesse em tentar realizar a soma de todas as casas do tabuleiro, e após um determinado tempo deixado para que tentassem resolver, foi solicitado para que eles chutassem um valor que acreditasse ser próximo à resposta correta. Foram obtidas várias respostas sendo algumas delas próximas à resposta certa, porém nenhuma correta. Era esperado que poucos alunos ou até mesmo nenhum deles chegassem à resposta correta devido à dimensão do resultado da soma que passava de 18 quintilhões de grãos de trigo.

Foi resolvida essa soma junto com os alunos e então retomado o vídeo para confirmar a resposta. Os alunos demonstraram grande interesse nesta atividade com vários comentários sobre o vídeo e mantendo interação durante toda a atividade com inúmeras respostas das perguntas e comentários como “são muitos grãos de trigo”, “o rei está falido”, dentre outras.

Em seguida, apresentamos a definição de uma progressão geométrica e alguns exemplos, neste momento não houve dúvidas por parte dos alunos. Prosseguimos, mostrando como obter a razão de uma P.G. e realizando este cálculo de cada um dos exemplos apresentados. Apenas um aluno manifestou dúvida para encontrar a razão da seguinte P.G. $f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3})$, diante disso o professor Edivaldo foi ao quadro realizar novamente a explicação, reescrevendo a sequência e encontrando a razão a partir da divisão dos termos -6 por -18, obtendo então 1/3.

Logo após, ao apresentar as classificações de P.G., o áudio da professora Milena começou a travar, então os alunos mandaram no chat da plataforma Jitsi que não estavam entendendo, porém não houve mudança de professor para continuar a explicação, o áudio melhorou e a professora prosseguiu.

As explicações de P.G. crescente, decrescente, constante e estacionária ocorreram conforme planejado, para fixar a ideia de P.G. estacionária, o professor Eduardo associou à um carro estacionado, que após o primeiro termo a sequência fica estacionada no zero. Para exemplificar uma P.G. alternada pedimos aos alunos que dissessem um primeiro termo e uma razão menor que zero. Os alunos escolheram o primeiro termo sendo 7 e a razão sendo -3, assim escrevemos na apresentação do Power Point a seguinte P.G. alternada: $(7, -21, 63, \ldots)$.

Após a explicação, propomos quatro exercícios aos alunos e após um tempo para que resolvessem, trabalhamos a resolução com eles. O primeiro exercício pedia qual a classificação de uma P.G. em que a razão é maior que 1 e o primeiro termo é negativo. Obtivemos como resposta uma P.G. classificada como decrescente, que é a resposta correta. O segundo exercício pedia para determinar o segundo termo de uma P.G. crescente em que seu primeiro termo é 8 e o segundo termo é 18. Alguns alunos chegaram na resposta correta, porém não comentaram como pensaram. O terceiro exercício descrevia como tábuas de madeira eram empilhadas em uma certa madeireira, uma tábua na primeira pilha e nas seguintes o dobro do número de tábuas da anterior e então pedia para que calculasse a quantidade de tábuas na oitava pilha. Um dos alunos comentou no chat: “pegando as anotações do trigo, acho que 128”, notamos que ele compreendeu a ideia da história trabalhada no início da aula e o conceito de progressão geométrica. No exercício quatro, tudo ocorreu como o planejado.

Posteriormente, definimos o termo geral e a soma dos n primeiros termos de uma P.G., após este momento, voltamos ao exercício 4 para realizar a soma dos termos da P.G. obtida a partir da fórmula recém trabalhada. Finalizamos a aula com o exercício 5 do plano.

Após dado um tempo para que resolvessem, realizamos a resolução detalhada do exercício, durante e após a resolução os alunos fizeram vários comentários sobre a dificuldade da questão e da interpretação.

4.7 Módulo/encontro 7 –

4.7.1 Plano de aula

Conteúdo: Matrizes: definição, classificação, cálculos de soma, subtração, multiplicação e multiplicação por um número.

Público-Alvo:

Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino e inscritos no projeto.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de matriz.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar diferentes tipos de matrizes;
- Resolver problemas utilizando a linguagem matricial;
- Efetuar cálculos com matrizes;

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Power point, Jitsi, *Youtube*, *One Note*.

Encaminhamento metodológico

Será apresentado aos alunos o vídeo Cooperativa de Leite, disponível em: https://youtu.be/AXiNp1o88jA. O vídeo propõe um problema, em que uma cooperativa de seis fazendas produtoras de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso comum, assim, a questão chave é: Em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

O vídeo será apresentado até 4 min 26 segundos, com a seguinte imagem:

Figura 56: Ilustração das seis fazendas citadas no vídeo.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

Em seguida serão feitos alguns questionamentos:

- Em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

Será destacado que no vídeo, os cooperados decidem adotar como critério que o tanque seja instalado na fazenda que estiver na menor distância possível dentre os maiores percursos, ou seja, dadas as distâncias que cada fazendeiro deverá percorrer para levar seu leite até o tanque, a fazenda escolhida será a que resultar uma menor distância entre as maiores distâncias percorridas pelos outros fazendeiros.

Construiremos o quadro explicando as distâncias de ponto a ponto entre todas as fazendas.

Fazendas	A	B	C	D	E	F
A	0	5	11	14	12	15
B	5	0	6	9	14	10
C	11	6	0	3	8	4
D	14	9	3	0	5	2
E	12	14	8	5	0	7
F	15	10	4	2	7	0

Figura 57: Quadro com as distâncias de ponto a ponto entre todas as fazendas.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=42960

a) Se instalarmos o tanque na fazenda $\boldsymbol{B}$, qual fazendeiro percorreria a maior distância?

R: Conforme a segunda linha do quadro, seria o fazendeiro de E, com $14\ Km$.

b) Se escolhermos a fazenda $\boldsymbol{A}$, qual fazendeiro percorreria a maior distância?

R: Conforme a primeira linha do quadro seria o fazendeiro de F com $15\ Km$.

c) E de acordo com o critério de maior distância percorrida e a menor possível? Qual a melhor opção?

R: A fazenda C seria a melhor opção, pois entre as maiores distâncias essa é a mais vantajosa.

d) Todos os fazendeiros produzem a mesma quantidade de leite? Caso eles produzam quantidades diferentes, o número de viagens a serem feitas até o tanque para transportar o produto seria a mesma?

R: Não. A quantidade varia de acordo com a produção e pelo número de viagens necessárias para transportar a produção até o tanque.

Faremos um comparativo a partir não apenas das distâncias entre as fazendas, mas também da quantidade de viagens que cada fazendeiro faria por dia, mostrando a seguinte situação e fazendo alguns questionamentos apresentando os quadros.

Suponha agora que:

- A fazenda $\boldsymbol{A}$ precise de $\mathbf{4}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;
- A fazenda $\boldsymbol{B}$ precise de $\mathbf{3}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;
- A fazenda $\boldsymbol{C}$ precise de $\mathbf{2}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;
- A fazenda $\boldsymbol{D}$ precise de $\mathbf{1}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;
- A fazenda $\boldsymbol{E}$ precise de $\mathbf{3}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;
- A fazenda $\boldsymbol{F}$ precise de $\mathbf{4}$ viagens para transportar sua produção até o tanque;

FAZENDAS	A	B	C	D	E	F	NÚMERO DE VIAGENS
A	0	5	11	14	12	15	4
B	5	0	6	9	14	10	3
C	11	6	0	3	8	4	2
D	14	9	3	0	5	2	1
E	12	14	8	5	0	7	3
F	15	10	4	2	7	0	4

Figura 58: Fazendas e números de viagens que cada fazendeiro faria por dia.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

e) Neste caso, o que aconteceria com o número de viagens do produtor da fazenda ***A*** para levar seu produto até a fazenda onde deve ser instalada o tanque?

R: Seriam 4 viagens até o tanque proposto.

f) E com o produtor da fazenda ***B***?

R: Seriam necessárias 3 viagens.

FAZENDAS	A	B	C	D	E	F
A	0	3x5	2x11	1x14	3x12	4x15
B	4x5	0	2x6	1x9	3x14	4x10
C	4x11	3x6	0	1x3	3x8	4x4
D	4x14	3x9	2x3	0	3x5	4x2
E	4x12	3x14	2x8	1x5	0	4x7
F	4x15	3x10	2x4	1x2	3x7	0

Figura 59: Produto das distâncias com o número de viagens.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

Agora obtemos nas linhas a distância que cada fazendeiro teria que percorrer para levar seu produto até determinado tanque.

Fazendas	A	B	C	D	E	F
A	0	15	22	14	36	60
B	20	0	12	9	42	40
C	44	18	0	3	24	16
D	56	27	6	0	15	8
E	48	42	16	5	0	28
F	60	30	8	2	21	0

Figura 60: Distância que cada fazendeiro percorreria.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=42960

Neste caso, seguindo os mesmos critérios:

Em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

R: Seria a fazenda $\boldsymbol{B}$ para a qual o fazendeiro da fazenda $\boldsymbol{E}$ teria que percorrer no máximo $42\ km$.

Para resolver este problema, é necessário apenas interpretar os dados do problema e, nesse caso, a representação na forma de um quadro foi muito útil. Realizamos uma representação matricial.

Matrizes

Neste momento utilizaremos as matrizes apresentadas na introdução da aula para fazer algumas observações.

Dados dois números naturais m e n diferentes de zero, chamamos de **matriz** $m \times n$, todo quadro composto por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Em uma matriz qualquer, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i representa o número da linha e o índice j representa o número da coluna.

O quadro em que seus elementos são as distâncias de uma fazenda até cada uma das outras é um exemplo de matriz.

Fazendas	A	B	C	D	E	F
A	0	5	11	14	12	15
B	5	0	6	9	14	10
C	11	6	0	3	8	4
D	14	9	3	0	5	2
E	12	14	8	5	0	7
F	15	10	4	2	7	0

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{11} & \mathbf{14} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{14} & \mathbf{10} \\ \mathbf{11} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{14} & \mathbf{9} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{12} & \mathbf{14} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \\ \mathbf{15} & \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Figura 61: Quadro com as distâncias de ponto a ponto entre todas as fazendas.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=42960

A matriz M também é chamada de matriz **quadrada** pois o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, M é uma matriz quadrada do tipo 6×6.

Uma matriz quadrada possui duas diagonais, uma **diagonal principal** e uma **diagonal secundária**. Os elementos que formam a **diagonal principal** são os elementos a_{ij} tais que $i = j$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 11 & 14 & 12 & 15 \\ 5 & 0 & 6 & 9 & 14 & 10 \\ 11 & 6 & 0 & 3 & 8 & 4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 12 & 14 & 8 & 5 & 0 & 7 \\ 15 & 10 & 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 62: Diagonal principal de uma matriz.
Fonte: Próprio autor.

E os elementos que formam a **diagonal secundária** são os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 11 & 14 & 12 & 15 \\ 5 & 0 & 6 & 9 & 14 & 10 \\ 11 & 6 & 0 & 3 & 8 & 4 \\ 14 & 9 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 12 & 14 & 8 & 5 & 0 & 7 \\ 15 & 10 & 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 63: Diagonal secundária de uma matriz.
Fonte: Próprio autor.

Diagonal secundária: Composta pelos elementos $a_{16} = 15$, $a_{25} = 14$, $a_{34} = 3$, $a_{43} = 14$ e $a_{61} = 15$.

Após apresentar o conceito de diagonal principal e diagonal secundária, vamos mostrar a definição de uma matriz diagonal.

Existem matrizes em que apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero, uma matriz dessa forma é chamada de **matriz diagonal**.

Por exemplo: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz I é também uma matriz quadrada do tipo 4×4. Além dessas classificações, ela recebe o nome de **matriz identidade**, pois é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Outra matriz que podemos destacar é a matriz que possui como elementos os números de viagens de cada fazendeiro para chegar à cooperativa. Essa matriz recebe o nome de **matriz coluna**.

Figura 64: Matriz coluna.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

$$V = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna } 6 \times 1.$$

Além da matriz coluna, também temos a **matriz linha** que é uma matriz com qualquer quantidade de colunas e apenas uma linha.

Por exemplo: $[0 \quad 9 \quad -1 \quad 7]$ é uma matriz linha 1×4.

Outra matriz importante de conhecer é a matriz transposta.

Dada uma matriz A de ordem $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, chama-se **matriz transposta** de A, indicada por A^t , a matriz de ordem $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$, obtida trocando-se ordenadamente as linhas de A pelas colunas de A.

Por exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2, então $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

Note que:

A primeira linha da matriz A é igual à primeira coluna da matriz A^t.

A segunda linha da matriz A é igual à segunda coluna da matriz A^t.

Uma matriz quadrada A de ordem n denomina-se **matriz simétrica**, quando $A = A^t$.

Será proposto um exercício que envolve definição de matrizes:

1. Construir a matriz $A = [a_{ij}]_{2\times3}$, tal que $a_{ij} = (i + j)^2$.

Resolução:

Observamos que a matriz A é do tipo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Sendo a lei de formação $a_{ij} = (i + j)^2$, temos:

$a_{11} = (1 + 1)^2 = 4$ $\qquad$ $a_{21} = (2 + 1)^2 = 9$

$a_{12} = (1 + 2)^2 = 9$ $\qquad$ $a_{22} = (2 + 2)^2 = 16$

$a_{13} = (1 + 3)^2 = 16$ $\qquad$ $a_{23} = (2 + 3)^2 = 25$

Logo $\quad :A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

Soma de matrizes

Com o intuito de introduzir a soma de matrizes, será deixado um tempo para que os alunos tentem resolver o seguinte exercício.

2. O dono de uma rede de padarias mantém registrado cada tipo de pão vendido em três de suas lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado. Os quadros a seguir mostram as vendas de duas semanas.

Quadro 14: Vendas na semana 1.

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Pão Francês	620	790	730
Baguete	49	40	37
Pão doce	230	189	177

Fonte: Próprio autor.

Quadro 15: Vendas na semana 2.

Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Pão Francês	590	770	598
Baguete	76	44	53

Pão doce	223	176	190

Fonte: Próprio autor.

Qual é o total de vendas de cada tipo de pão em cada padaria?

R: Para encontrar o total de vendas de cada pão basta somarmos os dados correspondentes de cada tipo de pão em cada loja. Dessa forma, teremos:

Quadro 16: Soma de cada tipo de pão da semana 1 e semana 2.

semana 1 + semana 2	**Loja 1**	**Loja 2**	**Loja 3**
Pão Francês	$620 + 590$	$790 + 770$	$730 + 598$
Baguete	$49 + 76$	$40 + 44$	$37 + 53$
Pão doce	$230 + 223$	$189 + 176$	$177 + 190$

Fonte: Próprio autor.

Que resulta em:

Quadro 17: Total de vendas de cada pão.

semana 1 + semana 2	**Loja 1**	**Loja 2**	**Loja 3**
Pão Francês	1210	1560	1328
Baguete	125	84	90
Pão doce	453	365	367

Fonte: Próprio autor.

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Serão discutidas as respostas obtidas pelos alunos e então será feita a resolução do exercício e a formalização da soma de matrizes:

Exemplo: No exercício 2, podemos organizar os dados como matrizes, de forma que as colunas representem as lojas e as linhas representem os tipos de pães, da seguinte forma

$$\begin{array}{cc} Semana\ 1 & Semana\ 2 \\ \begin{bmatrix} 620 & 790 & 730 \\ 49 & 40 & 37 \\ 230 & 189 & 177 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 590 & 770 & 598 \\ 76 & 44 & 53 \\ 223 & 176 & 190 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fazendo a soma das matrizes $Semana\ 1$ e $Semana\ 2$, teremos:

$$Semana\ 1 + Semana\ 2$$

$$\begin{bmatrix} 620 + 590 & 790 + 770 & 730 + 598 \\ 49 + 76 & 40 + 44 & 37 + 53 \\ 230 + 223 & 189 + 176 & 177 + 190 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1210 & 1560 & 1328 \\ 125 & 84 & 90 \\ 453 & 365 & 367 \end{bmatrix}$$

3. A partir da matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ cujo $a_{ij} = 3i + 2j \ e \ B = (b_{ij})_{2\times 2}$, dado por $b_{ij} = i + j$, determine o valor de $A + B$.

R: Inicialmente, vamos encontrar as matrizes A e B:

Sabemos que os elementos de A são dados por $a_{ij} = 3i + 2j$, logo, a matriz A será:

$$A = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 & 3\cdot 2 + 2\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, os elementos de B são dados por $b_{ij} = i + j$, desse modo, a matriz B será:

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora basta somas as matrizes A e B:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5+2 & 7+3 \\ 8+3 & 10+4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

Subtração de matrizes

A **diferença** entre duas matrizes A e B, de mesmo tipo, é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Chama-se **Matriz oposta** de uma matriz $A_{m\times n}$ (denotada por $-A_{m\times n}$) a matriz que somada com A, resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m\times n}$.

Exemplo: Sejam as matrizes A e B tais que

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

A diferença entre A e B é:

$$A - B = A + (-B)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 6 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+2 & 5-1 \\ -4+6 & -2-7 & 0-5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & -9 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dado um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o produto $k \cdot A$ é uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e j.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e o número real $k = 2$, a multiplicação de k por A é dada por:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-6) & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -12 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz resultante D tal que $D = 2A + 3B - C$.

R: Para encontrar a matriz D, devemos inicialmente efetuar as multiplicações $2A$ e $3B$. Desse modo, teremos:

$$D = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 8 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \cdot (-8) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & 9 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2-24-3 & 10+9-4 \\ 16-3-2 & 4+12+1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} -25 & 15 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

O produto da matriz $A = (a_{ij})_{m \times k}$pela matriz $B = (b_{ij})_{k \times n}$, que se indica por AB ou $A \cdot B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que cada elemento c_{ij} é igual ao produto da linha i de A pela coluna j de B.

Observação:

Observe que se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Exemplos da observação:

a) Existe produto:

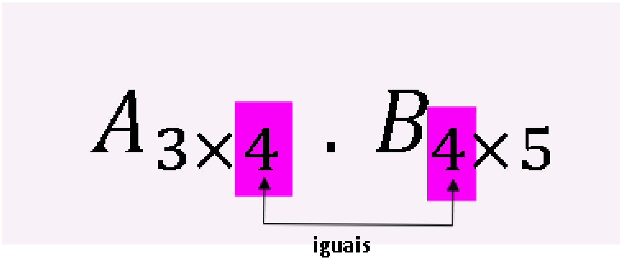

Figura 65:Produto de duas matrizes.
Fonte: Próprio autor.

b) Não existe produto:

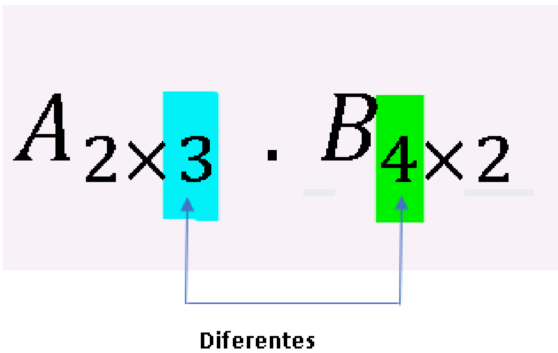

Figura 66: Produto de duas matrizes.
Fonte: Próprio autor.

Note que a matriz C, tal que $C = AB$, possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é:

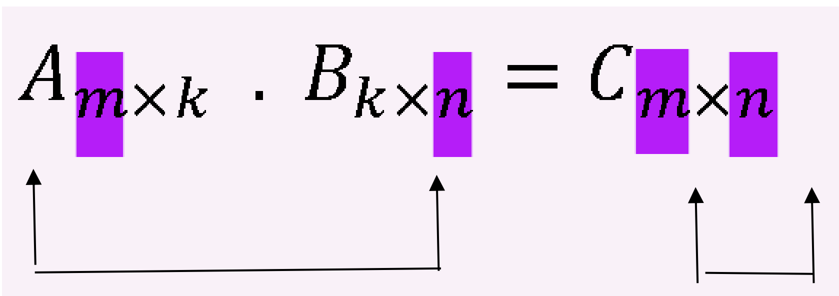

Figura 67: Resultado do produto de duas matrizes.
Fonte: Próprio autor.

Por exemplo:

a) $A_{3\times 5} \cdot B_{5\times 8} = C_{3\times 8}$ b) $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 2} = C_{1\times 2}$

Exemplo de multiplicação de duas matrizes:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, podemos calcular o produto $A \cdot B =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 5\cdot 3 + 8\cdot 1 & 2\cdot 3 + 5\cdot 6 + 8\cdot 2 & 2\cdot 4 + 5\cdot 1 + 8\cdot 0 \\ 1\cdot 4 + 4\cdot 3 + (-3)\cdot 1 & 1\cdot 3 + 4\cdot 6 + (-3)\cdot 2 & 1\cdot 4 + 4\cdot 1 + (-3)\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 8+15+8 & 6+30+16 & 8+5+0 \\ 4+12-3 & 3+24-6 & 4+4+0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 31 & 52 & 13 \\ 13 & 21 & 8 \end{bmatrix}$$

5. (Unioeste, 2017) Existem dois valores reais, α_1 e α_2, que α pode assumir de modo que a equação, matricial $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita solução não trivial. Assim é CORRETO afirmar que

a) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 20$.

b) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 100$.

c) $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 20$.

d) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 16$.

e) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 84$.

Resolução: A solução trivial é $x = y = 0$. Precisamos encontrar os valores de α_1 e α_2 tais que a solução não será a trivial.

Multiplicando α pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ teremos

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 10x + 4y \\ 4x + 10y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Como temos a igualdade das matrizes, teremos

$$10x + 4y = \alpha x$$

$$4x + 10y = \alpha y$$

Dividindo ambas as equações

$$\frac{10x + 4y}{4x + 10y} = \frac{\alpha x}{\alpha y}$$

$$\frac{10x + 4y}{4x + 10y} = \frac{x}{y}$$

$$(10x + 4y)y = (4x + 10y)x$$

$$10xy + 4y^2 = 4x^2 + 10yx$$

$$10xy - 10yx + 4y^2 - 4x^2 = 0$$

$$4y^2 - 4x^2 = 0$$

$$4y^2 = 4x^2$$

$$y = \pm x$$

Para $y = x$

$$10x + 4x = \alpha x$$

$$14x = \alpha x$$

$$\alpha = 14$$

Para $y = -x$

$$10x - 4x = \alpha x$$

$$6x = \alpha x$$

$$\alpha = 6$$

Como 14 e 6 são números inteiros e $14 \times 6 = 84$, a alternativa correta é a letra E.

6. (ENEM, 2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Figura 68: Registro de notas bimestrais de algumas disciplinas.
Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/matrizes/questoes?from_omniauth=true&provider=google_oauth2#

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução:

O aluno quer calcular a média aritmética de quatro notas, ou seja, as quatro notas devem ser somadas e divididas por quatro. Dessa forma, a matriz obtida deve ser multiplicada por uma matriz em que seus elementos sejam todos iguais a $\frac{1}{4}$, pela definição de produto matriz, a matriz obtida deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4×1. Esta é a matriz da alternativa E.

7. (ENEM, 2019) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) Segunda-feira
b) Terça-feira
c) Quarta-feira
d) Quinta-feira
e) Sexta-feira

Resolução:

Devemos somar todos os elementos das colunas para saber em qual dia o teste apresentou maior acerto.

Segunda-feira: $3+3+2+3+0=11$

Terça-feira: $2+2+2+2+2=10$

Quarta-feira: $0+4+2+4+0=10$

Quinta-feira: $1+1+3+1+4=10$

Sexta-feira: $2+2+2+0+4=10$

Como segunda-feira possui a maior soma, então é o dia da semana que o teste possui mais acertos.

Avaliação:

Será observado se os alunos são capazes de identificar diferentes tipos de matrizes, efetuar cálculos com matrizes e resolver problemas utilizando a linguagem matricial, por meio da participação no chat e de forma oral e pela interação nas atividades e resoluções de exercícios durante o desenvolvimento da aula.

Referências

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 4:** Sequências Matrizes Determinantes Sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Youtube, 2012. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA>. Acesso em: 18 abril. 2021.

QUESTÕES ENEM DE MATEMÁTICA – MATRIZES. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/matrizes/questoes?from_omniauth=true&provider=google_oauth2# > Acesso em: 18 de abril. 2021.

PAIVA. M. **Matemática, volume único**. 1. ed. São Paulo, 2005.

WEBER, J. **Exercícios 2º ano ens. médio**. 2012. Disponível em: <concordia.g12.br/profes/jairo/segundos/EXERCÍCIOS%202º%202012.pdf>. Acesso em: 2021 abr. 2021

UNIOESTE. **Concurso Vestibular 2016-17**. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores >. Acesso em 23 abr. 2021

4.7.2 Relatório da aula 7

No dia 24 de abril, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma Jitsi. O início estava marcado para as 9:00, porém por volta das 8:30 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado e contamos com a presença de 10 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, embora no encontro anterior tivesse 12 alunos presentes.

Iniciamos a aula com o vídeo “Cooperativa de Leite”, disponível em: https://youtu.be/AXiNp1o88jA. O vídeo propõe um problema, em que uma cooperativa de seis fazendas produtoras de leite decide construir um tanque de refrigeração para uso comum. Assim, a questão chave era: Em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

O vídeo foi apresentado até 4 min 26 segundos, momento que prosseguimos com a seguinte imagem:

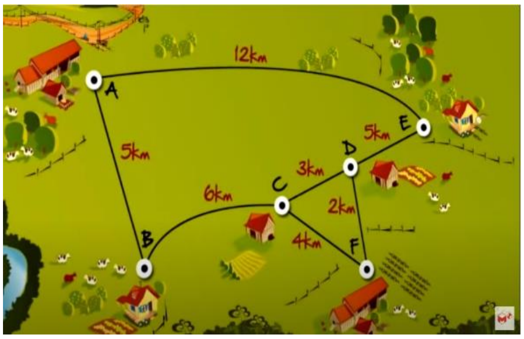

Figura 69: Ilustração das seis fazendas citadas no vídeo.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

Foi destacado que os cooperados decidem adotar como critério que o tanque seja instalado na fazenda que estiver na menor distância possível dentre os maiores percursos, ou seja, dadas as distâncias que cada fazendeiro deverá percorrer para levar seu leite até o tanque, a fazenda escolhida será a que resultar uma menor distância entre as maiores distâncias percorridas pelos outros fazendeiros.

Posteriormente, construímos um quadro com os alunos no qual era explicado as distâncias de ponto a ponto entre todas as fazendas. Destacamos que um quadro organizado em linhas e colunas no formato m x n, onde m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical) é chamada de matriz. Mostramos, no quadro construído, que as posições de cada distância obtida na matriz possuem uma nomenclatura, que a matriz obtida possui uma diagonal principal com elementos iguais a 0, e pode ser observado que a parte triangular superior da matriz é igual a parte triangular inferior.

Fazenda	A	B	C	D	E	F
A	0	5	11	14	12	15
B	5	0	6	9	14	10
C	11	6	0	3	8	4
D	14	9	3	0	5	2
E	12	14	8	5	0	7
F	15	10	4	2	7	0

Figura 70: Quadro das fazendas e números de viagens que cada fazendeiro faria por dia.
Fonte: Próprio autor.

Seguimos a aula com questionamentos levando os alunos a pensarem na questão inicial da cooperativa, observando no quadro construído os menores valores possíveis dentre os maiores percursos, onde obtivemos várias respostas corretas.

Na sequência da aula propomos uma nova situação, onde cada fazendeiro faria uma quantidade diferente de viagens para transportar seu produto até o tanque, destacando que seria necessário multiplicar a quantidade de quilômetros das colunas do quadro anterior pelo número de viagens, já que os fazendeiros produzem quantidades diferentes de leite, deste modo obtendo um novo quadro.

FAZENDAS	A	B	C	D	E	F
A	0	3x5	2x11	1x14	3x12	4x15
B	4x5	0	2x6	1x9	3x14	4x10
C	4x11	3x6	0	1x3	3x8	4x4
D	4x14	3x9	2x3	0	3x5	4x2
E	4x12	3x14	2x8	1x5	0	4x7
F	4x15	3x10	2x4	1x2	3x7	0

Figura 71: Produto das distâncias com o número de viagens.
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=AXiNp1o88jA

Com o novo quadro, fizemos o seguinte questionamento:

Neste caso, seguindo os mesmos critérios anteriores, em qual das fazendas deve ser instalado o tanque?

Obtivemos respostas dizendo que desta vez o tanque deveria ser instalado na fazenda B, que possui menor distância entre os maiores percursos que cada fazendeiro fará para chegar ao tanque de refrigeração. Foi ressaltado que para resolver este problema, é necessário apenas interpretar os dados do problema e, nesse caso, a representação na forma de um quadro foi muito útil. Realizamos uma representação matricial.

Após a resolução dos problemas apresentados no vídeo mostramos a definição de uma matriz e algumas de suas classificações. Como exemplo de matriz retornamos ao quadro utilizado para resolver o problema da instalação do tanque de leite. Neste momento os alunos não demonstraram dúvidas.

Antes de apresentar a definição de soma de matrizes, foi solicitado que os alunos resolvessem um exercício que envolvia a venda de três tipos de pães em três lojas distintas em duas semanas, sendo organizado os dados em duas tabelas. Durante a resolução, um dos alunos comentou que seria possível utilizar a soma de matrizes para encontrar o total de pães vendidos nas duas semanas. Neste mesmo exercício, um aluno perguntou se havia problema trocar as colunas pelas linhas, e lhe foi explicado que não havia problema, pois ao trocar as colunas pelas linhas ele estaria trabalhando com a matriz transposta e não alteraria o resultado da soma.

Em seguida, foi explicado subtração de matrizes e então a multiplicação de um número real por uma matriz. Para fixar esses conteúdos, foi proposto um exercício. Notou-se que os alunos estavam tentando resolver, pois vários deles comentaram que estavam fazendo, alguns chegaram na resposta correta e outros se aproximaram dela.

O último conteúdo abordado nesta aula foi multiplicação de matrizes. Iniciamos a explicação com a definição e com a discussão de casos em que a realização do produto de matrizes é possível. Então apresentamos um exemplo, momento no qual os alunos interagiram pelo chat dizendo: “a conta é fácil, porém imensa”, “passava um perrengue fazendo essa conta na escola, /agora/ que eu consegui entender isso de multiplicar linha e coluna”. Para finalizar a aula propusemos um exercício do ENEM de 2012 que abordava esse conteúdo.

Deixamos como tarefa de casa dois exercícios, sendo um do vestibular da Unioeste de 2017 e um do ENEM 2019 e suas resoluções foram disponibilizadas de forma assíncrona.

4.8 Módulo/encontro 8 -

4.8.1 Plano de aula

Conteúdo:

Sistemas lineares: definição, método de substituição, determinantes e regra de Cramer.

Público-Alvo:

Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino e inscritos no projeto.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de sistemas lineares e determinantes.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e resolver sistemas lineares.
- Realizar cálculos de determinante de uma matriz.
- Resolver problemas que envolvam sistemas lineares.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Power point, Jitsi, OneNote.

Encaminhamento metodológico

Para introduzir o conceito de sistemas lineares vamos propor para os alunos resolverem o problema a seguir. Após um determinado tempo, trabalharemos a resolução.

(UNIFESP-04) Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e uma caneta é R$10,00. O preço da caneta é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. Qual a soma dos preços de aquisição de uma caneta e de um lápis?

Resolução: Vamos considerar que l é o preço do lápis e c é o preço da caneta. Sabemos que, somando o preço de dois lápis e um estojo será R$10,00, ou seja,

$$l + l + c = 10$$

$$2l + c = 10$$

Sabemos também que o preço da caneta é R$5,00 mais barato que o preço de três lápis, ou seja,

$$c = 3l - 5$$

Podemos obter o preço da caneta em função do preço do lápis substituindo $c = 3l - 5$ na equação $2l + c = 10$, obtendo

$$2l + (3l - 5) = 10$$

$$2l + 3l - 5 = 10$$

$$5l - 5 = 10$$

$$5l = 10 + 5$$

$$5l = 15$$

$$l = \frac{15}{5} = 3$$

Assim, sabemos que o preço de um lápis é R$ 3,00. E podemos substituir $l = 3$ na equação $c = 3l - 5$ que teremos o preço de uma caneta.

$$c = 3l - 5$$

$$c = 3(3) - 5$$

$$c = 9 - 5$$

$$c = 4$$

Logo, o preço de uma caneta é R$ 4,00

Então, a soma dos preços de aquisição de uma caneta e de um lápis é R$ 7,00.

Para resolver o exercício acima utilizamos duas equações com coeficientes reais.

$$\begin{cases} 2l + c = 10 \\ c = 3l - 5 \end{cases}$$

Observe que podemos manipular a segunda equação

$$c = 3l - 5$$

Somando 5 e subtraindo c de ambos os lados da igualdade

$$5 = 3l - c$$

Reescrevendo de forma conveniente

$$3l - c = 5$$

é possível organizar as equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2l + c = 10 \\ 3l - c = 5 \end{cases}$$

As duas formas de organizar as equações acima são chamadas de sistemas lineares.

Um sistema linear é um conjunto de $m \geq 1$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Assim, o sistema a seguir é linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Os coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{mn}$ são coeficientes reais.

E $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ são chamados termos independentes e também são números reais.

Para ilustrar vamos apresentar o sistema a seguir e identificar os coeficientes, os termos independentes e as incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z - t = 8 \\ 2x + y - 2z \qquad = 8 \\ -x - 2y + z - 3t = 1 \\ -5x - y + \qquad 6t = 4 \end{cases}$$

Questionar aos alunos:

Quantas equações esse sistema possui? Quais são as incógnitas? Quais são os coeficientes? E os termos independentes?

O sistema possui quatro equações, sendo x, y, z e t as incógnitas, os valores $\{3, 2, -1, -5\}$ são os coeficientes de x, $\{-5, 1, -2, -1\}$ são os coeficientes de y, $\{4, -2, 1, 0\}$ são os coeficientes de z, $\{-1, 0, -3, 6\}$ são os coeficientes de t. Os termos independentes são $\{8, 8, 1, 4\}$.

Utilizaremos a seguinte ilustração para auxiliar os alunos a responderem o questionamento e construir junto com eles a matriz dos coeficientes:

$$\begin{cases} 3x \quad -5y \quad +4z \quad -1t = 8 \\ 2x \quad +1y \quad -2z \quad +0t = 8 \\ -1x \quad -2y \quad +1z \quad -3t = 1 \\ -5x \quad -1y \quad +0z \quad +6t = 4 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \quad x & \quad y & \quad z & \quad t \\ \quad \downarrow & \quad \downarrow & \quad \downarrow & \quad \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 72: Matriz dos coeficientes de um sistema.
Fonte: Próprio autor.

1. (ENEM, 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar no máximo 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300
b) 360
c) 400
d) 480
e) 600

Resolução:

Seja x o peso da telha e y o peso do tijolo, como o caminhão pode carregar no máximo 1 500 telhas ou 1 200 tijolos, então

$$1500x = 1200y$$

Isolando y nessa equação encontramos:

$$y = \frac{1500}{1200}x = \frac{15}{12}x = \frac{5}{4}x$$

Como foi carregado 900 telhas e queremos descobrir um número n de tijolos para atingir a capacidade máxima da carga possível para o caminhão, temos:

$$900x + ny = 1500x$$

Substituindo y obtemos

$$900x + n\left(\frac{5}{4}x\right) = 1500x$$

$$900x + n\left(\frac{5}{4}x\right) - 1500x = 0$$

Como temos x em comum em todos os termos, vamos colocá-lo em evidência:

$$x\left(900 + n\left(\frac{5}{4}\right) - 1500\right) = 0$$

Nesse caso a equação zera quando $900 + n\left(\frac{5}{4}\right) - 1500 = 0$ ou $x = 0$, como sabemos que $x = 0$ não faz sentido então:

$$900 + n\left(\frac{5}{4}\right) - 1500 = 0$$

$$n\left(\frac{5}{4}\right) = -900 + 1500$$

$$n\left(\frac{5}{4}\right) = 600$$

$$n = 600\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$n = 120 \times 4 = 480$$

Assim, podem ser acrescentados 480 tijolos à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão.

Determinantes

No exercício 2 realizamos diversas contas para encontrar a solução. Porém nem sempre a solução de um sistema linear existe. Mas como podemos saber se ela existe ou não? Uma das maneiras é por meio do cálculo do determinante.

De acordo com Iezzi e Hazan (2013), a teoria dos determinantes teve início na metade do século XVII, sendo utilizados para resolver sistemas lineares de equações.

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes podemos descobrir se existe solução ou não. Veremos como fazer isso logo a seguir:

Retornando ao sistema de equações do exercício 1,

$$\begin{cases} 2l + c = 10 \\ 3l - c = 5 \end{cases}$$

Obtendo a matriz dos coeficientes desse sistema

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ matriz quadrada 2×2.

Calculamos o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 da seguinte forma:

1) Se A é uma matriz de ordem 2, então o **determinante de $\boldsymbol{A}$** é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária.

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes obtida a partir do sistema

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (1 \times 3) = -5$

Sabemos que a solução desse sistema existe pois já a encontramos. Agora também sabemos que a matriz dos coeficientes tem determinante diferente de zero.

2. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

a) $R\$\ 100{,}00$, sendo o preço do látex $R\$\ 4{,}00$ e o do corante $R\$\ 8{,}00$;

b) $R\$\ 80{,}00$, sendo o preço do látex $R\$\ 4{,}00$ e o do corante $R\$\ 4{,}00$;

c) $R\$\ 60{,}00$, sendo o preço do látex $R\$\ 4{,}00$ e o do corante $R\$\ 4{,}00$.

Resolução:

a) Representando a quantidade, em litro, de látex e de corante por x e y, respectivamente, e sabendo que sempre haverá mistura entre eles, construímos o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}, \quad com\ x > 0\ e\ y > 0$$

Resolvendo S_1 por substituição:

Isolando a incógnita y na primeira equação:

$$y = 20 - x$$

Substituindo y na segunda equação:

$$4x + 8(20 - x) = 100$$

$$\Rightarrow 4x + 160 - 8x = 100$$

$$\Rightarrow -4x = 100 - 160$$

$$\Rightarrow x = \frac{-60}{-4}$$

$$\Rightarrow x = 15$$

Substituindo o valor de x encontrado em $y = 20 - x$:

$$y = 20 - 15$$

$$\Rightarrow y = 5$$

Nota-se que o sistema S_1 possui uma única solução, isso indica que o sistema é possível e determinado.

b) Nesse caso, o sistema será:

$$S_2 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}, \quad com\ x > 0\ e\ y > 0$$

Resolvendo esse sistema, isolando x na primeira equação e substituindo na segunda:

$$x = 20 - y$$

$$\Rightarrow 4(20 - y) + 4y = 80$$

$$\Longrightarrow 80 - 4y + 4y = 80$$
$$\Longrightarrow 80 = 80$$

Nota-se que para S_2 há infinitas soluções, pois, a segunda equação é o quádruplo da segunda. Algumas das soluções possíveis são $(1,19), (2,18), (3,17)$. Nota-se que essas soluções são do tipo $(20 - k, k)$. Quando isso acontece o sistema é chamado de possível e indeterminado.

c) Para essa situação vamos considerar o seguinte sistema:

$$S_3 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}, \quad com\ x > 0\ e\ y > 0$$

Resolvendo esse sistema, isolando x na primeira equação e substituindo na segunda:

$$x = 20 - y$$
$$\Longrightarrow 4(20 - y) + 4y = 60$$
$$\Longrightarrow 80 - 4y + 4y = 60$$
$$\Longrightarrow 80 = 60 \Longrightarrow Falso!!$$

Para S_3 não há valores para x e para y que satisfaz o sistema. Para esse tipo de sistema, denominamos como sistema impossível.

A) Quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero, o sistema é **possível e determinado**, ou seja, a solução existe e é única

B) Se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, o sistema pode ser **impossível**, isto é, não existe solução, ou **possível e indeterminado**, isto é, existem infinitas soluções.

3. Uma pessoa comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo. Na farmácia onde realizou a compra, o preço de um pacote de algodão mais um rolo de gaze e mais um rolo de esparadrapo é R$ 16,00. Um rolo de esparadrapo custa R$ 2,00 a menos que um pacote de algodão e R$ 1,00 a mais que um rolo de gaze. Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi

A) R$ 0,50

B) R$ 1,00

C) R$ 1,50

D) R$ 2,50

E) R$ 2,00

Resolução: Consideremos o preço do pacote de algodão sendo x, o preço do rolo de gaze como y e z o preço do rolo de esparadrapo, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=16} \\ \boldsymbol{z=x-2} \\ \boldsymbol{z=y+1} \end{cases}$$

Manipulando a segunda e a terceira equação temos

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=16} \\ \boldsymbol{x-z=2} \\ \boldsymbol{-y+z=1} \end{cases}$$

Vamos descobrir se o sistema linear possui solução.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \textbf{matriz quadrada } \mathbf{3 \times 3}$$

Observemos que neste caso temos uma matriz quadrada de ordem 3. Podemos utilizar a Regra de Sarrus para calcular o determinante de A.

Inicialmente copiamos as duas primeiras colunas à direita da matriz A.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{array}\right|$$

Em seguida multiplicamos os elementos da diagonal principal e também os elementos das diagonais que estão no mesmo sentido. Então somamos esses produtos.

O processo deve ser repetido para a diagonal secundária e as diagonais que estão no mesmo sentido. Estes produtos devem ser subtraídos do produto inicial.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{array}\right|$$

$$\mathbf{de\,t}\,\boldsymbol{A} = [(\mathbf{1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{-1})]$$
$$- [(\mathbf{1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{-1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1})]$$

$$\boldsymbol{det\ A} = (\mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{1}) - (\mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{1}) = \mathbf{-1} - \mathbf{2} = \mathbf{-3}$$

Como o determinante é -3 o sistema possui solução única.

Resolvendo o sistema por substituição,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=16} \\ \boldsymbol{x-z=2} \\ \boldsymbol{-y+z=1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=16} \\ \boldsymbol{x=2+z} \\ \boldsymbol{z=1+y} \end{cases}$$

Substituindo $z = 1 + y$ na segunda equação temos

$$x = 2 + (1 + y)$$

$$x = 3 + y$$

Dessa forma temos x e z em função de y, vamos substituir $z = 1 + y$ e $x = 3 + y$ na primeira equação.

$$(3 + y) + y + (1 + y) = 16$$

$$4 + 3y = 16$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

Substituindo $y = 4$ em $z = 1 + y$ e $x = 3 + y$ obtemos,

$$z = 1 + 4 = 5$$

$$x = 3 + 4 = 7$$

Logo a solução do sistema é $x = 7$, $y = 4$ e $z = 5$.

Resolvendo o sistema pela Regra de Cramer.

Como já calculamos o determinante da matriz dos coeficientes A e sabemos que esse valor é -3, ou seja, diferente de 0, podemos utilizar a Regra de Cramer para encontrar a solução:

Calculando A_x:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{16} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{16} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{array}\right|$$

$$\boldsymbol{det}(A_x) = [(\mathbf{16} \times \mathbf{0} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{-1})] - [(\mathbf{1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{16} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{-1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1})]$$

$$\boldsymbol{det}(A_x) = (\mathbf{0} - \mathbf{1} - \mathbf{2}) - (\mathbf{0} + \mathbf{16} + \mathbf{2}) = \mathbf{-3} - \mathbf{18} = \mathbf{-21}$$

Fazendo $\frac{\boldsymbol{det}(A_x)}{\det(A)} = \frac{-21}{-3} = +7$ logo $x = 7$.

Calculando A_y:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{16} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{16} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right|$$

$$\boldsymbol{det}(A_y) = [(\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{16} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1})] - [(\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{-1} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{16} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1})]$$

$$\boldsymbol{det}(A_y) = (\mathbf{2} + \mathbf{0} + \mathbf{1}) - (\mathbf{0} - \mathbf{1} + \mathbf{16}) = \mathbf{3} - \mathbf{15} = \mathbf{-12}$$

Fazendo $\frac{\boldsymbol{det}(A_y)}{\det(A)} = \frac{-12}{-3} = +4$ logo $y = 4$.

Calculando A_z:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{16} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{matrix}\Bigg|$$

$$\boldsymbol{det}(A_z) = [(\mathbf{1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{16} \times \mathbf{1} \times \mathbf{-1})] - [(\mathbf{16} \times \mathbf{0} \times \mathbf{0}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{-1}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1})]$$

$$\boldsymbol{det}(A_z) = (\mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{16}) - (\mathbf{0} - \mathbf{2} + \mathbf{1}) = \mathbf{-16} + \mathbf{1} = \mathbf{-15}$$

Fazendo $\frac{\boldsymbol{det}(A_z)}{\det(A)} = \frac{-15}{-3} = +5$ logo $z = 5$.

Logo a solução do sistema é $x = 7$, $y = 4$ e $z = 5$.

4. Calcule o determinante da matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & \mathbf{4} \end{matrix}\Bigg|$$

$$\boldsymbol{det\ A} = [(\mathbf{1} \times \mathbf{7} \times \mathbf{2}) + (\mathbf{9} \times \mathbf{8} \times \mathbf{10}) + (\mathbf{5} \times \mathbf{3} \times \mathbf{4})] - [(\mathbf{5} \times \mathbf{7} \times \mathbf{10}) + (\mathbf{1} \times \mathbf{8} \times \mathbf{4}) + (\mathbf{9} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2})]$$

$$\boldsymbol{det\ A} = (\mathbf{14} + \mathbf{720} + \mathbf{60}) - (\mathbf{350} + \mathbf{32} + \mathbf{54}) = \mathbf{794} - \mathbf{436} = \mathbf{358}$$

5. (Unioeste, 2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro a seguir. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total na mesa 2 foi de R$ 25,00 e na mesa 3 foi de R$ 70,00, então é CORRETO afirmar que:

Quadro 18: Quantidade de produtos por mesa.

	PRODUTO	PRODUTO	PRODUTO
MESA	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

Fonte: Próprio autor.

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.

b) É possível determinar o valor do consumo total da mesa 1.

c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.

d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.

e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

Resolução: Vamos considerar c o preço do café, m o preço do misto quente e p o preço do pão de queijo.

Com as informações do enunciado podemos montar o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 3c + 2m + 4p = 25 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3:

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 9c + 6m + 12p = 75 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Fazendo a terceira equação menos a segunda:

$$9c + 5m + 12p - 9c - 6m - 12p = 70 - 75$$

$$-m = -5$$

$$m = 5$$

O preço unitário do misto quente é R$ 5,00. Logo, descartamos a alternativa a.

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 3c + 2m + 4p = 25 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Fazendo a terceira equação menos a segunda

$$9c + 5m + 12p - 3c - 2m - 4p = 70 - 25$$

$$6c + 3m + 8p = 45$$

Observemos no sistema que $6c + 3m + 8p$ é o preço da mesa 1, logo

$$6c + 3m + 8p = mesa_1 = 6c + 3m + 8p = 45$$

Assim, o preço total da mesa 1 é R$ 45,00. E a alternativa correta é a letra b.

Avaliação: Será utilizado o *quiz Kahoot* para avaliar os alunos.

Referências

GLOBO. **Educação**. Disponível em: <http://educacao.globo.com/provas/enem2013/questoes/148.html>. Acesso em: 17 abr. 21.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 4:** Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

KAHOOT. Disponível em: <https://kahoot.com/?utm_name=controller_app&utm_source=controller&utm_campaign=controller_app&utm_medium=link>. Acesso em: 17 abr. 2021.

PROENEM. **Proenem:** Sistemas de 2 e 3 variáveis. Disponível em: <https://www.proenem.com.br/enem/matematica/sistemas-lineares-de-2-e-3-variaveis/>. Acesso em: 20 abr. 21.

UNIOESTE. **Concurso Vestibular 2020**. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores>. Acesso em 06 mai. 21.

4.8.2 Relatório da aula 8

No dia 08 de maio nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma *Jitsi*. O início estava marcado para às 9:00, porém por volta das 8:30 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado e contamos com a presença de 10 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta, e o número de alunos que acessaram o link da aula foi o mesmo do encontro anterior.

Antes de iniciar o conteúdo foi solicitado aos alunos que enviassem fotos das resoluções dos exercícios. Apenas um aluno compartilhou via *Whatsapp* com um dos professores sua resolução do primeiro exercício.

Para introduzir o conceito de sistemas lineares foi proposto para os alunos que resolvessem o problema a seguir:

(UNIFESP-04) Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e uma caneta é R$10,00. O preço da caneta é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. Qual a soma dos preços de aquisição de uma caneta e de um lápis?

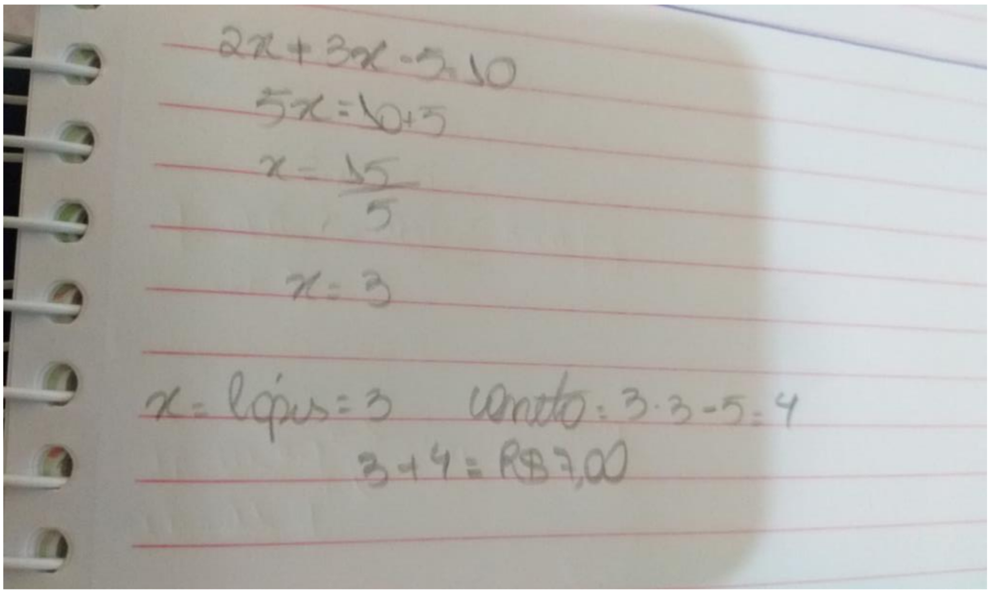

Figura 73: Resolução do primeiro exercício enviado pelo aluno.
Fonte: Próprio autor.

Alguns dos alunos interagiram por meio do chat com as seguintes respostas: “eu acho que uma caneta e um lapis é 7 reais”, “Aqui deu 7 tbm”, “aqui também” e “o poder das substituições me ajudou”.

Em seguida, a professora escreveu e explicou no OneNote a solução enviada e então foi feito a resolução conforme descrito no plano de aula, que envolvia a montagem de um sistema de equações. Neste exercício os alunos não demonstraram ter dúvidas. Passou-se então à formalização de sistemas lineares e os alunos quando questionados responderam que não havia dúvidas e que compreenderam o conceito.

Ao propor o exercício a seguir, os alunos tentaram resolvê-lo. Dois deles compartilharam por meio do chat a resposta correta e o modo como resolveram, porém, sem detalhes. Os comentários foram:

Aluno 1: “a minha deu D”

Aluno 1: “dividi um pelo outro, multipliquei por aquele outro e dividi pelo outro”.

Aluno 2: “D”.

Aluno 2: “Usei a regrinha de três”.

(ENEM, 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar no máximo 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300
b) 360
c) 400
d) 480
e) 600

Ao iniciar a resolução do exercício, notou-se que a imagem da câmera não estava focando no quadro branco e foi necessário resolver pelo powerpoint. O professor Edivaldo resolveu inicialmente por substituição, no entanto, os alunos não compreenderam esse método, uma vez que eles já haviam comentado que tentaram resolver por regra de três. Desse modo, o professor Eduardo resolveu por regra de três mesmo não estando planejado e comentou que nesse caso o problema poderia ter sido resolvido por regra de três, porém, nem sempre esse método pode ser empregado para a resolução de sistemas.

Antes de explicar como encontrar o determinante de uma matriz de ordem 2×2, a professora Fabiana questionou os alunos se eles sabiam como determinar se um sistema linear possui solução antes de tentar resolver o sistema. Não foram obtidas respostas o que deu a entender que eles não sabiam. Após explicado como realizava o cálculo do determinante, foi proposto o exercício 3 a seguir:

2. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

   a) $R\$ \ 100{,}00$, sendo o preço do látex $R\$ \ 4{,}00$ e o do corante $R\$ \ 8{,}00$;
   b) $R\$ \ 80{,}00$, sendo o preço do látex $R\$ \ 4{,}00$ e o do corante $R\$ \ 4{,}00$;
   c) $R\$ \ 60{,}00$, sendo o preço do látex $R\$ \ 4{,}00$ e o do corante $R\$ \ 4{,}00$.

Após deixado um tempo para a resolução, foi perguntado aos alunos se conseguiram resolver e se tinham chegado em alguma resposta. Um dos alunos mandou a resposta que ele obteve no item a) e no item b) pelo chat:

Aluno 3: “na A o meu talvez tenha dado 15l de la [sic] e 5 l de corante na B o meu deu 10 litros pra cada”

Aluno 3: “eu peguei vinte reais e encaixei três latex e um corante e depois multipliquei por 5”.

Foi comentado que a resposta que ele chegou estava correta e foi resolvido esse exercício pelo método de substituição conforme descrito no plano de aula. Após a resolução do exercício foi explicada a classificação dos sistemas lineares e calculado o determinante dos sistemas encontrados no exercício 3 e classificados esses sistemas de acordo com a explicação dada.

Um aluno perguntou como saber se um sistema é impossível, a professora Fabiana retomou o exercício 3 e explicou novamente a classificação dos sistemas e a professora Milena acrescentou com mais uma explicação sobre as soluções do sistema possível determinado, em que para esse tipo de sistema, se isolarmos uma incógnita conseguimos encontrar o valor da outra.

Na sequência da aula foi proposto o quarto exercício que tinha como objetivo ensinar o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3 para descobrir se o sistema linear a seguir possui solução:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 16} \\ \boldsymbol{z = x - 2} \\ \boldsymbol{z = y + 1} \end{cases}$$

Foi construída a matriz dos coeficientes e apresentado a regra de Sarrus para fazer o cálculo do determinante. Terminando a explicação da regra de Sarrus e feito a conta, um dos alunos comentou no chat que não havia entendido como obter a matriz dos coeficientes, então novamente a professora Milena explicou que para obter esta matriz escrevemos na primeira coluna os coeficientes de x, na segunda coluna os coeficientes de y e na terceira e última coluna escrevemos os coeficientes de z, e que estes coeficientes são os números que multiplicam as incógnitas.

Os alunos comentaram que ficaram com dúvidas na parte da regra de Sarrus, neste momento o professor Eduardo fez a explicação utilizando uma imagem, então os alunos pediram para fazer um exercício para praticarem.

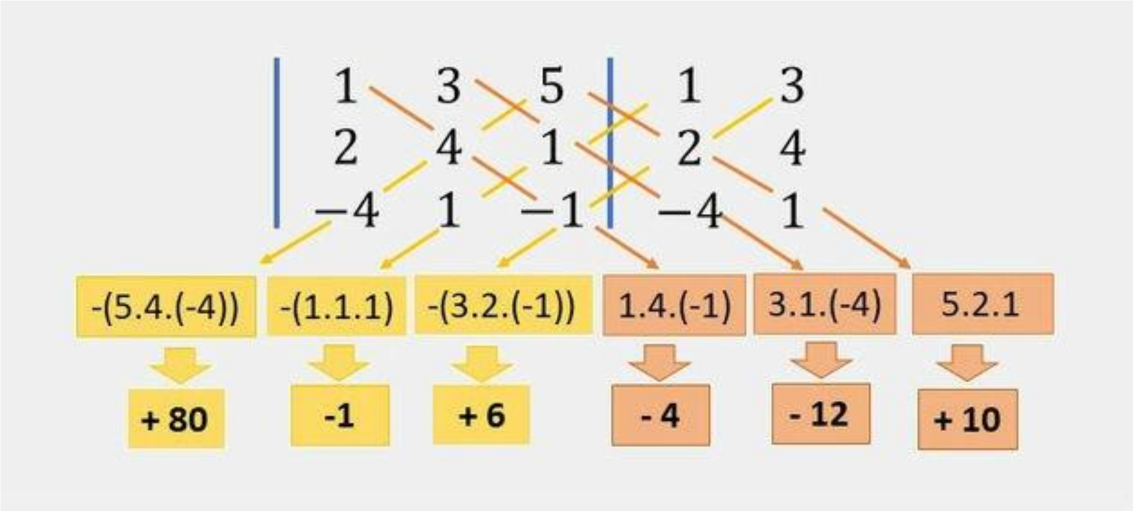

Figura 74: Ilustração da Regra de Sarrus.
Fonte: https://www.todamateria.com.br/regra-de-sarrus/

Como exercício de prática foi proposto o exercício 5 que pedia para calcular o determinante da matriz a seguir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Após um tempo dado aos alunos para resolverem, o professor perguntou se haviam chegado em algum resultado. No chat dois alunos enviaram 357 e 358 como resposta, sendo a correta 358. Em seguida a resolução foi feita pelo professor e as dúvidas foram esclarecidas.

Para finalizar a aula e avaliar os alunos, foi disponibilizado um quiz no *Kahoot* em que sete alunos responderam, com as seguintes questões:

1. Das equações a seguir, as que podem ser estruturadas em um sistema linear são:

Resposta correta: $x + 2y = 6, x - y = 3y$29% dos alunos acertaram.

2. Sobre sistemas lineares é incorreto afirmar:

Resposta incorreta: Se o sistema não possui solução é chamado de indeterminado.

43% dos alunos acertaram.

3. O determinante de uma matriz $3X3$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária.

Resposta correta: False

29% dos alunos acertaram.

4. Quando o sistema é possível e determinado a solução é única.

Resposta correta: True (verdadeiro).

57% dos alunos acertaram.

5. Resolva o seguinte sistema: $2x - y = 7 \ e \ 4x + y = 5$.

Resposta correta: x=2.

86% dos alunos responderam corretamente.

É possível perceber com a porcentagem de acertos do quiz que os alunos compreenderam como resolver um sistema linear, porém observamos que a classificação de um sistema em possível determinado, impossível ou possível indeterminado e o determinante de uma matriz de ordem 3 não foi totalmente compreendido por todos.

Em razão da falta de tempo, o exercício 4 não foi resolvido pela regra de Cramer como planejado, porém a explicação dessa regra foi disponibilizada para os alunos no material entregue antes da aula. Assim como também o exercício 6 que não foi trabalhado na aula.

4.9 Módulo/encontro 9 -

4.9.1 Plano de aula

Conteúdo:

Função, progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes e sistemas lineares.

Público-Alvo:

Alunos e egressos da Rede Pública de Ensino e inscritos no projeto.

Objetivo Geral:

Praticar os conceitos estudados durante o curso.

Objetivos Específicos:

Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar qual teoria está envolvida nos problemas propostos;

- Aplicar os conceitos estudados;
- Resolver problemas que envolvam os conteúdos de função, progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes e sistemas lineares.

Tempo de execução:

Um encontro com duração de 2 horas e 30 minutos.

Recursos didáticos:

Power point, Jitsi, YouTube, papel.

Encaminhamento metodológico:

Para iniciar a aula, será passado o vídeo disponibilizado pelo link https://www.youtube.com/watch?v=DID_ojhCkjY com o intuito de motivar os alunos. O restante da aula será voltado para a resolução de exercícios dos conteúdos já trabalhados durante o curso.

Os seguintes exercícios serão passados em slides e deixado um tempo para os alunos resolverem. A correção será feita após cada exercício resolvido:

Funções

1. (Faap) A água que está esguichando de um bocal mantido horizontalmente a 4 metros acima do solo descreve uma curva parabólica com o vértice no bocal. Sabendo-se que a corrente de água desce 1 metro medido na vertical nos primeiros 10 metros de movimento horizontal, conforme a figura a seguir:

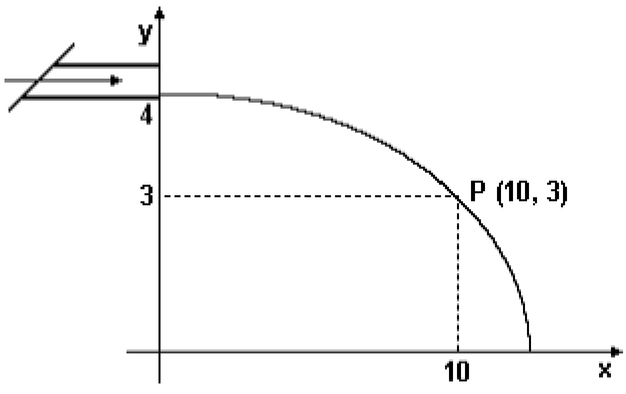

Figura 75: Gráfico do exercício.
Fonte: Próprio autor.

Podemos expressar y como função de x: a) $y = -x^2 + 4x + 10$ b) $y = x^2 - 10x + 4$ c) $y = (-\frac{x^2}{10}) + 10$ d) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 10x + 4$ e) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 4$.

Resolução:

Por se tratar de uma parábola, a lei geral de formação de uma função quadrática é:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Como a concavidade é voltada para baixo, isso implica em $a < 0$, como ela intercepta o eixo das ordenadas no valor 4, logo $c = 4$, com essas informações, nos restam de possibilidade duas alternativas, d) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 10x + 4$ e e) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 4$. Como é dado o ponto $P(10, 3)$, aplicamos $x = 10$ nas duas leis de formação restantes possíveis para descobrir a correta:

$$y = (-\frac{10^2}{100}) + 10.10 + 4$$

$$y = -1 + 100 + 4 = 103 \neq 3$$

Logo, resta apenas a última alternativa, fazendo a prova real com o ponto P:

$$y = (-\frac{10^2}{100}) + 4$$

$$y = -1 + 4 = 3$$

Logo a alternativa correta é a letra e.

Progressão aritmética e geométrica:

2. (ENEM) – Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:

a) 21 c) 26 e) 31

b) 24 d) 28

Resolução:

Pensamos na sequência das colunas como a P.A. $(1,2,3,4,5,6,7)$, onde é possível notar uma sequência numérica que se comporta de forma linear com $r = 1$, deste modo o problema se trata da soma dos termos de uma PA em que podemos resolver da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Com $a_1 = 1$, $a_n = 7$ e $n = 7$ temos

$S_n = \frac{7(1+7)}{2} = 28$, portanto o monte formado pelas cartas que sobram corresponde a $52 - 28 = 24$ cartas, alternativa correta é a letra b.

Matrizes, determinantes e sistemas

6. (Unioeste, 2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro a seguir. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total na mesa 2 foi de R$ 25,00 e na mesa 3 foi de R$ 70,00, então é CORRETO afirmar que:

Quadro 19: Quantidade de produtos por mesa.

	PRODUTO	**PRODUTO**	**PRODUTO**
MESA	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

Fonte: Próprio autor.

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.

b) É possível determinar o valor do consumo total da mesa 1.

c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.

d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.

e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

Resolução: Vamos considerar c o preço do café, m o preço do misto quente e p o preço do pão de queijo.

Com as informações do enunciado podemos montar o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 3c + 2m + 4p = 25 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3:

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 9c + 6m + 12p = 75 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Fazendo a terceira equação menos a segunda:

$$9c + 5m + 12p - 9c - 6m - 12p = 70 - 75$$

$$-m = -5$$

$$m = 5$$

O preço unitário do misto quente é R$ 5,00. Logo, descartamos a alternativa a.

$$\begin{cases} 6c + 3m + 8p = mesa_1 \\ 3c + 2m + 4p = 25 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$$

Fazendo a terceira equação menos a segunda

$$9c + 5m + 12p - 3c - 2m - 4p = 70 - 25$$
$$6c + 3m + 8p = 45$$

Observemos no sistema que $6c + 3m + 8p$ é o preço da mesa 1, logo

$$6c + 3m + 8p = mesa_1 = 6c + 3m + 8p = 45$$

Logo o preço total da mesa 1 é R$ 45,00. E a alternativa correta é a letra b.

Funções

3. (Ita) Seja $D = R - \{1\}$ e $f : D \longrightarrow D$ uma função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Considere as afirmações:

I - f é injetiva e sobrejetiva.

II - f é injetiva, mas não sobrejetiva.

III - $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$, para todo $x \in D, x \neq 0$.

IV - $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras:

a) apenas I e III. b) apenas I e IV. c) apenas II e III. d) apenas I, III e IV. e) apenas II, III e IV.

Resolução: A afirmativa III é verdadeira pois

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} =$

$$\frac{\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)(x+1) + \left(\frac{1}{x} + 1\right)(x-1)\right)}{(x-1)\left(\frac{1}{x} - 1\right)} =$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{x} - x - 1 + 1 - \frac{1}{x} + x - 1\right)}{1 - x - \frac{1}{x} + 1} =$$

$$\frac{0}{2 - x - \frac{1}{x}} = 0$$

Logo $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$ para todo $x \in D, x \neq 0$. Neste caso teríamos problema para $x = 1$ porém $1 \notin D$.

A afirmativa IV é falsa pois,

$f(x) = (\frac{x+1}{x-1})$ e $f(-x) = (\frac{-x+1}{-x-1})$

$$f(x)f(-x) = (\frac{x+1}{x-1})(\frac{-x+1}{-x-1}) =$$

$$\frac{(x+1)\,(-x-1)}{(x-1)(-x-1)} = \frac{-x^2+x-x+1}{-x^2-x+x+1} =$$

$$\frac{-x^2+1}{-x^2+1} = 1$$

Se $x = -1 \in D$ teríamos $f(-(-1)) = (\frac{-(-1)+1}{-(-1)-1}) = \frac{1+1}{1-1}$, neste caso o denominador seria igual a zero, porém isso não pode acontecer.

A afirmativa I está correta pois, para a função ser sobrejetiva todo y no contradomínio deve estar associado a algum x no domínio.

$y \in Cd(f) \Rightarrow y = f(x)$ para algum $x \in D \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)y = x+1 = xy - y - 1 = x \Rightarrow -y-1 = x - xy \Rightarrow -y-1 = x(1-y) \Rightarrow \frac{-y-1}{1-y} = \frac{-1-y}{1-y}$.

A única restrição seria $y = 1$, como $f\colon D \to D$ $1 \notin D$.

Para ser injetora, se $f(a) = f(b)$ então $a = b$.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} \Rightarrow (a+1)(b-1) = (b+1)(a-1)$$

$ab - a + b - 1 = ba - b + a - 1 = ab - ba - a - a - 1 + 1 = -b - b \Rightarrow -2a = -2b \Rightarrow a = b$.

Concluímos que f é injetora.

A afirmativa II está incorreta pois afirma que f não é sobrejetiva e já mostramos que é.

Logo a alternativa correta é a letra a.

Progressão aritmética e geométrica:

4. (Udesc) Se o primeiro termo vale 2 e a razão é 3, então os termos gerais da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica correspondentes são:

a) $2 + 3n$ e $\frac{(2\cdot 3)^n}{3}$

b) $2 + 3n\ e\ \frac{3^{n-1}}{2}$

c) $3n - 1\ e\ 2\cdot 3^n$

d) $3 + 2n\ e\ 3\cdot 2^n$

e) $3n - 1\ e\ \left(\frac{2}{3}\right)\cdot 3^n$

Resolução:

Lembrando que para encontrar um termo qualquer de uma PA e PG temos:

Para PA $a_n = a_1 + (n-1)r$, neste caso o termo geral seria dado por,

$a_n = 2 + (n-1)3 = \ 2 - 3 + 3n = 3n - 1$

Para PG $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, neste caso o termo geral seria dado por,

$a_n = 2 \times 3^{(n-1)} = 2 \times 3^n \times 3^{-1} = \frac{2}{3} \times 3^n$

Relembrando que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$.

Portanto a alternativa correta é a letra e.

Matrizes, determinantes e sistemas

5. (Unioeste, 2017) Existem dois valores reais, α_1 e α_2, que α pode assumir de modo que a equação, matricial $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita solução não trivial. Assim é CORRETO afirmar que

a) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 20$.

b) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 100$.

c) $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 20$.

d) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 16$.

e) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 . \alpha_2 = 84$.

Resolução: A solução trivial é $x = y = 0$. Precisamos encontrar os valores de α_1 e α_2 tais que a solução não será a trivial.

Multiplicando α pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ teremos

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 10x + 4y \\ 4x + 10y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Como temos a igualdade das matrizes, teremos

$$10x + 4y = \alpha x$$

$$4x + 10y = \alpha y$$

Dividindo ambas as equações

$$\frac{10x + 4y}{4x + 10y} = \frac{\alpha x}{\alpha y}$$

$$\frac{10x + 4y}{4x + 10y} = \frac{x}{y}$$

$$(10x + 4y)y = (4x + 10y)x$$

$$10xy + 4y^2 = 4x^2 + 10yx$$

$$10xy - 10yx + 4y^2 - 4x^2 = 0$$

$$4y^2 - 4x^2 = 0$$

$$4y^2 = 4x^2$$

$$y = \pm x$$

Para $y = x$

$$10x + 4x = \alpha x$$

$$14x = \alpha x$$

$$\alpha = 14$$

Para $y = -x$

$$10x - 4x = \alpha x$$

$$6x = \alpha x$$

$$\alpha = 6$$

Como 14 e 6 são números inteiros e $14 \times 6 = 84$, a alternativa correta é a letra e.

Funções

7. (Faap) A variação de temperatura $y = f(x)$ num intervalo de tempo x é dada pela função $f(x) = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + m - 3$; calcule m de modo que o gráfico da função seja uma reta e $f(x)$ seja crescente:

a) -3 c) $\mathbf{3}$ e) 0

b) 9 d) -9

Resolução: Para que $f(x)$ seja uma reta, a função não deve ter o termo x^2, desse modo, o coeficiente $(m^2 - 9)$ deve ser igual a zero, ou seja,

$$m^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 9$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow m = \pm 3$$

Porém, o exercício também pediu que a função seja crescente, desse modo, para que a função seja crescente, o coeficiente angular da função afim deve ser positivo e maior do que zero.

Tomando $m = -3$ e substituindo em $f(x)$:

$$f(x) = ((-3)^2 - 9)x^2 + (-3 + 3)x + (-3) - 3$$
$$\Rightarrow f(x) = (9 - 9)x^2 + (-3 + 3)x - 3 - 3$$
$$\Rightarrow f(x) = 0x^2 + 0x - 6$$
$$\Rightarrow f(x) = -6$$

Desse modo, m não pode assumir o valor -3, pois a $f(x)$ encontrada para $m = -3$ é uma função constante e não uma função afim.

Tomando $m = 3$ e substituindo em $f(x)$:

$$f(x) = ((3)^2 - 9)x^2 + (3 + 3)x + 3 - 3$$
$$\Rightarrow f(x) = 0x^2 + 6x - 0$$
$$\Rightarrow f(x) = 6x$$

Desse modo, m pode assumir o valor 3, pois ao substituir em $f(x)$, encontramos uma função afim crescente conforme pedia o exercício.

Matrizes, determinantes e sistemas

8. (UEL) Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 3×4 e $p \times q$. Se a matriz $A \cdot B$ é 3×5, então é verdade que

a) $p = 5$ e $q = 5$

b) $p = 4$ e $q = 5$

c) $p = 3$ e $q = 5$

d) $p = 3$ e $q = 4$

e) $p = 3$ e $q = 3$

Resolução: Para este produto existir o número de colunas da matriz A tem que ser igual ao número de linhas da matriz B,como $A_{3\times 4}$ e $B_{p\times q}$, logo $p = 4$. Além disso como produto é $A \cdot B = C_{3\times 5}$ e o número de colunas do produto deve ser o mesmo do que o número de colunas de B, temos que $q = 5$.

Logo a alternativa correta é a letra b.

Exercícios extras:

1. (Ufpe) Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora $y = f(x)$?

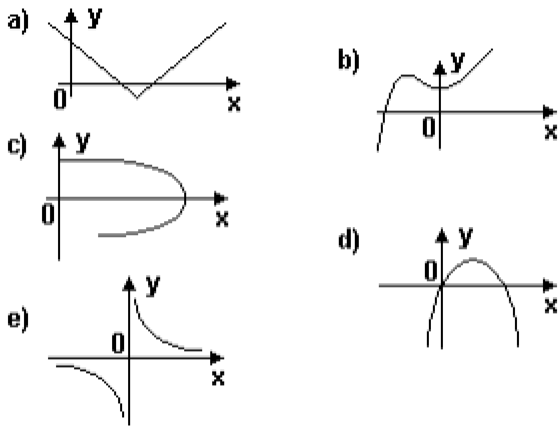

Figura 76: Gráfico de funções.
Fonte: Projeto Medicina.

Resolução: Uma função é injetora se elementos distintos do domínio estão associados a elementos distintos da imagem.

Lembremos que no gráfico de uma função injetora qualquer reta paralela ao eixo x vai cortar o gráfico da função em apenas um ponto. Fazendo esta análise concluímos que o gráfico da alternativa e é de uma função injetora.

1. (Uff) Toda matriz de ordem 2×2, que é igual a sua transposta, possui:

a) pelo menos dois elementos iguais.

b) os elementos da diagonal principal iguais a zero.

c) determinante nulo.

d) linhas proporcionais.

e) todos os elementos iguais a zero.

Resolução:

Seja a matriz A e sua A^t dada por;

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, notemos que para $A = A^t$ devemos ter $b = c$, logo a alternativa A é correta.

Avaliação:

Será observado no decorrer da aula se os alunos são capazes de identificar qual teoria está envolvida nos problemas propostos, aplicar os conceitos estudados, resolver problemas que envolvam os conteúdos de função, progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes e sistemas lineares por meio da interação no chat e comunicação oral na plataforma Jitsi.

Referências:

BEDUKA. **Exercícios sobre progressão aritmética (P.A) com gabarito**. Disponível em: <https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-sobre-progressao-aritmetica/> . Acesso em 23 abr. 2021.

PROJETO MEDICINA. Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/398/matematica_funcoes_funcao_bijetora.pdf>. Acesso em 23 abr. 2021.

PROJETO MEDICINA. Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/398/matematica_funcoes_funcao_afim.pdf>. Acesso em 23 abr. 2021.

PROJETO MEDICINA. Disponível em: <http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/409/matematica_matrizes_exercicios.pdf >. Acesso em: 23 abr. 21.

MULLER, W. A. **Motivacional- O sapinho**. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=DID_ojhCkjY>. Acesso em: 23 abr. 21.

PROJETO MEDICINA. Disponível em: <http://www.projetomedicina.com.br/site/attachments/article/758/matematica_sistemas_lineares_exercicios_gabarito.pdf>. Acesso em 23 abr. 2021.

UNIOESTE. **Concurso Vestibular 2020**. Disponível em: < https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores >. Acesso em: 06 mai. 2021.

UNIOESTE. **Concurso Vestibular 2016-17**. Disponível em: <https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores >. Acesso em 23 abr. 2021

4.9.2 Relatório da aula 9

No dia 15 de maio, nos reunimos com os participantes do Promat por meio da plataforma *Jitsi*. O início estava marcado para às 9:00, porém por volta das 8:30 abrimos a sala para esperar os alunos começarem a entrar. Iniciamos no horário marcado e contamos com a presença de 10 alunos. Não tivemos nenhuma justificativa de falta e o número de alunos que acessaram o link da aula foi o mesmo dos encontros anteriores.

A aula foi iniciada pelo professor Eduardo com um exercício que continha o gráfico de uma função e pedia para expressar y em função de x. O enunciado está logo a seguir:

6. (Faap) A água que está esguichando de um bocal mantido horizontalmente a 4 metros acima do solo descreve uma curva parabólica com o vértice no bocal. Sabendo-se que a corrente de água desce 1 metro medido na vertical nos primeiros 10 metros de movimento horizontal, conforme a figura a seguir:

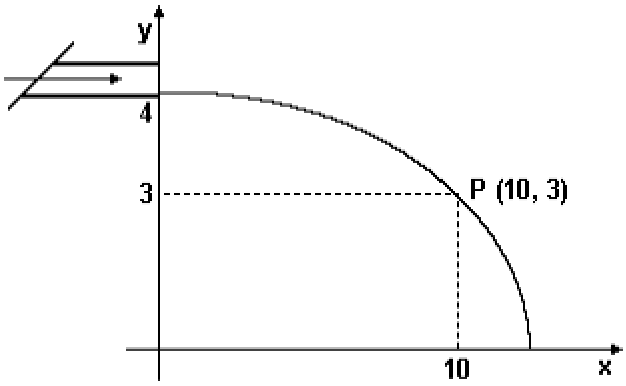

Figura 77: Gráfico do exercício.
Fonte: Próprio autor.

Podemos expressar y como função de x: a) $y = -x^2 + 4x + 10$ b) $y = x^2 - 10x + 4$ c) $y = (-\frac{x^2}{10}) + 10$ d) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 10x + 4$ e) $y = (-\frac{x^2}{100}) + 4$.

Foram deixados cinco minutos para que os alunos resolvessem e então o professor pediu aos alunos se haviam chegado em alguma resposta. Apenas um aluno respondeu pelo chat a alternativa c. Em seguida foi apresentado pelo professor duas possíveis soluções no papel que estava sendo filmado pelo seu celular. A primeira por tentativa, observando que a concavidade da parábola estava voltada para baixo, decorria então que o coeficiente a era menor que zero, logo a resposta correta não poderia ser a alternativa b. O professor retomou que uma parábola sempre corta o eixo y no valor do coeficiente c concluindo que $c = 4$, assim descartando as alternativas a e c. Então substituiu o valor de $x = 10$ nas alternativas restantes, pois pelo gráfico é possível perceber que para $x = 10$ tem-se $y = 3$ chegando que a lei de formação que descreve o gráfico é $y = (-\frac{x^2}{100}) + 4$ que é a alternativa e.

Na segunda solução foi apresentado de forma rápida a influência do coeficiente b no gráfico de uma função quadrática por meio do controle deslizante no Geogebra. Também foi retomado o eixo de simetria da parábola que neste caso era o próprio eixo y pois o enunciado informava que o vértice era o ponto (0, 4), logo o valor de b era zero e, como já sabíamos que a era menor que zero e $c = 4$, chegou-se novamente que a resposta correta era a alternativa e. Um aluno se manifestou no chat comentando: “agora faz sentido” e outra aluna comentou que tinha resolvido substituindo o ponto P(10,3) em cada lei de formação para saber qual é a certa: “eu tinha substituído todos tentando achar o 3”.

O segundo exercício consistia em descobrir qual era o número de cartas que formava o monte, que era as cartas não utilizadas no jogo. A seguir o enunciado:

2. (ENEM) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:

a)21 d)28

b)24 e)31

c)26

Foi lido o enunciado com os alunos e comentado que já haviam resolvido um exercício parecido nas aulas anteriores, neste momento um dos alunos recordou o seguinte: “é o do príncipe da matemática, não é? é isso”. Neste momento ressaltamos que foi uma ótima associação e, que foi resolvido o exercício que tratava da soma de Gauss, que foi considerado o príncipe da matemática. Na sequência foi concedido um tempo de 3 min. para os alunos resolverem, e obteve-se 4 respostas:

“acho que é a d”

“d”

“d também”

“d também”

Neste momento o professor comentou que os alunos chegaram numa resposta muito interessante, mas pediu que relessem o enunciado novamente, e focassem na questão principal que seria, qual quantidade de cartas que forma o monte, então novas respostas foram obtidas:

“b aqui”

“acho que é a b mesmo”

“Aqui deu b”

Posteriormente o professor comentou que iria resolver o exercício vendo se iria chegar nas mesmas respostas dos alunos. O exercício foi resolvido na lâmina projetada da seguinte maneira:

Pensamos na sequência das colunas como a P.A. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, onde é possível notar uma sequência numérica que se comporta de forma linear com $r = 1$, deste modo o problema trata da soma dos termos de uma PA que podemos resolver, com: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Com $a_1 = 1$, $a_n = 7$ e $n = 7$ temos,

$S_n = \frac{7(1+7)}{2} = 28$, portanto o monte formado pelas cartas que sobram corresponde a $52 - 28 = 24$ cartas. A alternativa correta é a letra B. Ainda neste exercício destacamos que a resolução não necessita da definição, porém, se tivéssemos muitas colunas de cartas, (1000 colunas por exemplo) ficaria complicado resolver sem utilizarmos a definição.

Para o exercício 3, a professora Fabiana leu o enunciado da questão e ressaltou alguns aspectos que poderiam ajudá-los na resolução. Dentre esses aspectos o fato de que o exercício já dava uma dica de que envolveria sistemas de equações lineares pelo fato de que na alternativa e) citava esse conceito. A professora também relembrou que em aulas anteriores já tinham sido resolvidos exercícios semelhantes a esse. Nessa questão os alunos não se manifestaram e não apresentaram dúvidas. A resolução do exercício foi realizada conforme planejado.

(Unioeste, 2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro a seguir. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total na mesa 2 foi de R$ 25,00 e na mesa 3 foi de R$ 70,00, então é CORRETO afirmar que:

Quadro 20: Quantidade de produtos por mesa.

	PRODUTO	**PRODUTO**	**PRODUTO**
MESA	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

Fonte: Próprio autor.

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.

b) É possível determinar o valor do consumo total da mesa 1.

c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.

d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.

e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

Em seguida o exercício 4, que está a seguir, foi proposto e lido pelo professor que logo depois apresentou a resolução conforme planejado. Nenhum aluno demonstrou dúvidas. Esse exercício explora muitas definições e conceitos por isso optou-se por resolvê-lo com os alunos.

4. (Ita) Seja $D = R - \{1\}$ e $f : D \longrightarrow D$ uma função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Considere as afirmações:

I - f é injetiva e sobrejetiva.

II - f é injetiva, mas não sobrejetiva.

III - $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$, para todo $x \in D, x \neq 0$.

IV - $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras:

b) apenas I e III. b) apenas I e IV. c) apenas II e III. d) apenas I, III e IV. e) apenas II, III e IV.

Prosseguimos a aula com o exercício 5, do qual foi lido o enunciado pelo professor e retomadas as definições de termo geral de PA e PG, ressaltando que não era somente com a definição que poderíamos resolvê-lo. Segue o enunciado:

5. (Udesc) Se o primeiro termo vale 2 e a razão é 3, então os termos gerais da Progressão Aritmética e da Progressão Geométrica correspondentes são:

a) $2 + 3n$ e $\frac{(2\cdot3)^n}{3}$

b) $2 + 3n\ e\, \frac{3^{n-1}}{2}$

c) $3n - 1\ e\ 2 \cdot 3^n$

d) $3 + 2n\ e\ 3 \cdot 2^n$

e) $3n - 1\ e\ \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 3^n$

Foi mostrado aos alunos, inicialmente, como resolver o exercício apenas usando o primeiro termo e uma razão, consiste em usar um termo qualquer ou geral de uma progressão e fazer testes comparando com as alternativas. Em seguida resolvemos utilizando as definições da seguinte maneira:

Lembrando que para encontrar um termo qualquer de uma PA e PG temos:

Para PA $a_n = a_1 + (n-1)r$, neste caso o termo geral seria dado por,

$a_n = 2 + (n-1)3 = 2 - 3 + 3n = 3n - 1$

Para PG $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, neste caso o termo geral seria dado por,

$a_n = 2 \times 3^{(n-1)} = 2 \times 3^n \times 3^{-1} = \frac{2}{3} \times 3^n$

Relembrando que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$.

Portanto a alternativa correta é a letra E.

Neste exercício os alunos não demonstraram dúvidas quando questionados, então prosseguimos a aula.

Para o último exercício resolvido em aula, a professora Fabiana leu o enunciado e deixou um tempo para os alunos resolverem. Nessa questão, um dos alunos respondeu que estava em dúvida entre a alternativa b) e a alternativa c), enquanto outro aluno comentou que chutaria na e). Depois desses comentários, a professora fez a correção do exercício. Após a correção, não foram apresentadas dúvidas. A resolução do exercício foi realizada conforme planejado.

7. (Faap) A variação de temperatura $y = f(x)$ num intervalo de tempo x é dada pela função $f(x) = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + m - 3$; calcule m de modo que o gráfico da função seja uma reta e $f(x)$ seja crescente:

a) -3

b) 9

c) 3

d) -9

e) 0

Como o tempo da aula estava acabando não foi possível trabalhar os exercícios 6 e 8 que estavam planejados. Nos últimos minutos da aula foram transmitidos alguns recados sobre a continuação do Projeto Promat que retornaria no dia 29 de maio com novos professores e informações sobre as notas do vestibular da Unioeste. A aula foi finalizada agradecendo a participação e presença dos alunos durante os 9 encontros. Eles também agradeceram os professores pelo chat conforme é possível perceber em alguns comentários que são citados a seguir: “Valeu por compartilhar seu tempo com a gente”, “É uma experiência muito boa, aprendi muito, obrigado pela dedicação nas aulas”, “Foi muito legal essa experiência, por mais que matemática seja difícil foi muito legal obrigada!!”, “obrigada pela dedicação, foi um tempo aí que vocês tiveram para preparar tudo para a gente”, “Gostei muitoo, obrigado por dedicação por nós” e “muito legal, obrigado pelas aulas, aprendi muita coisa com vocês... obrigado”.

Outros ainda escreveram: “obrigada pelas aulas, tchau”, “Até mais, obrigado pela aula”, “Até, obrigada pelas aulas”, “Foi loco, mas legal”, “Aprendi muito e esqueci mais ainda”, “Já é meu segundo Promat, um com experiência presencial e esse no online”.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Antes de iniciarmos a preparação das aulas sentimos um certo nervosismo devido ao fato de que para alguns de nós essa seria a primeira experiência de docência e mesmo que alguns já haviam estado em uma sala de aula como professores, desta vez isto iria acontecer de um modo desconhecido para nós: o modo remoto.

Mesmo não tendo experiência como professores, sabemos como funciona uma sala de aula. Porém, nossas aulas não seriam como é tradicionalmente, isto é, professor e aluno na sala de aula. Estaríamos cada um em suas casas, mas juntos virtualmente. Nosso grupo tinha receio de não conseguirmos interações com os alunos, nem mesmo se iríamos saber se estavam assistindo as aulas ou se estávamos falando sozinhos com computadores. Realmente não obtivemos grande interação visual com os alunos durante nossas aulas, a maior interação acontecia pelo *chat* da plataforma e poucas vezes utilizavam o microfone. Mas mesmo assim, foi perceptível a interação de vários deles.

Ao longo dos encontros, a quantidade de alunos diminuiu consideravelmente em relação ao primeiro encontro. Entretanto, alguns dos alunos que mais interagiam e participavam das aulas permaneceram até o último dia conosco.

Mesmo com os medos que tínhamos inicialmente e os obstáculos do ensino remoto, esta foi uma importante experiência como professores, pois tivemos o primeiro contato com os alunos, enfrentando um pouco do cotidiano vivido em sala de aula. Isto também nos mostrou como somos capazes de enfrentar e superar as dificuldades que encontramos e encontraremos no futuro.

De modo geral, iniciamos o PROMAT cheios de incertezas e medos, mas ao conhecermos mais os alunos, mesmo remotamente, conseguimos observar o melhor modo de ensinar, segundo as características que a turma apresentava, ou seja, com recursos e atividades que fugiam do tradicional. Logo, a partir do momento que introduzimos outras ferramentas nas aulas, como os jogos, vídeos e o Geogebra, os alunos se demonstraram mais abertos e mais interessados em aprender. Esse engajamento nos tornou mais confiantes no nosso trabalho, fazendo com que a cada encontro a interação dos alunos melhorasse e o aprendizado se tornasse mais efetivo.

REFERÊNCIAS

DANTAS, J. B. **A argumentação matemática na resolução de problemas de estrutura aditiva com alunos de EJA**. 2010. 144 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/4872/1/arquivo8497_1.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2021.

MAIOR, L.; TROBIA, J. **Tendências metodológicas de ensino-aprendizagem em educação matemática:** resolução de problemas-um caminho. 2009. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1785-8.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2021.

MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. **Revista de ensino, educação e ciências humanas**, v. 1, n. 1, p. 133-144, 2000.

ONUCHIC, L. DE LA R.; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática.** v.25, n.41, p. 73-98, dez. 2011.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

ZORZAN, A. S. L. Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. **Revista de Ciências Humanas**, v. 8, n. 10, p. 77-94, 2007.